EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 4

УДК 519.95 : 330.115

М. КАГАНОВИЧ

СКОЛЬЗЯЩЕЕ ПЛАНИРОВАНИЕ В МОДЕЛИ НЕЙМАНА—ГЕЙЛА

(Представлена Н. Алумяэ)

1. Содержание большинства работ по теории экономического роста состоит в построении и изучении свойств оптимальных траекторий, отбираемых по некоторому критерию при заданных начальных условиях. При этом характерна постановка задачи, в которой принятие решения (выбор оптимальной траектории) целиком осуществляется в начальный момент времени. Тем самым предполагается наличие исчерпывающих сведений о настоящих и будущих технологических возможностях, неизменность критерия оптимальности и исключается пересмотр плана на основе информации, поступающей в процессе функционирования системы.

Принцип регулярной текущей корректировки долгосрочного плана, получивший в литературе название скользящего или непрерывного планирования, состоит в следующем: в конце каждого периода (года), исходя из достигнутого состояния, заново рассчитывается оптимальная траектория, причем (конечный) горизонт планирования остается постоянным, а критерий оптимизации может каждый раз меняться. Легко видеть, что построенный таким образом скользящий план, вообще говоря, не является оптимальной траекторией. Тем не менее для ряда динамических моделей установлено [1–3], что он обладает некоторыми асимптотическими свойствами оптимальных траекторий.

В настоящей работе рассматривается модель Неймана—Гейла. Показывается, что в условиях теоремы о магистрали в сильной форме при достаточно большом горизонте планирования любой скользящий план, начиная с некоторого момента, лежит в малой окрестности неймановского луча — магистрали. В п. 2 приводятся определения и формулировка основного результата, в п. 3 — его доказательство.

Заметим, что рассмотрение процесса скользящего планирования наиболее оправдано для модели с переменными технологиями (напр., для модели типа Неймана—Гейла [4]), когда возможности прогнозирования ограничены горизонтом в T лет и построение траекторий большей длины исключено. Тогда по мере поступления новой информации перспективный T-летний план должен пересчитываться. Однако наше исследование для случая постоянной технологии можно рассматривать как первое приближение к проблеме в целом.

2. Пусть технология задана суперлинейным [4] точечно-множественным отображением $a: K \to \Pi(K)$, где K — замкнутый выпуклый содержащийся в R_+^n конус с вершиной в нуле, $\Pi(K)$ — множество его непустых подмножеств. Пусть $\hat{x}$ — неймановский вектор выпусков, т. е. вектор, доставляющий решение задаче отыскания максимального собственного значения $\alpha = \max\{\lambda \mid \exists x$ такой, что $\lambda x \in a(x)\}$. Предположим, что выполняется

А.1. Неймановский вектор $\hat{x}$ единствен с точностью до умножения на скаляр и положителен. Нормируем его так, что $\|\hat{x}\| = 1$. В этом случае найдется функционал $p \in K^*$ (неймановские цены) такой, что $py \leqslant \alpha px$ для любых $x \in K$, $y \in a(x)$.

А.2. $p \in \operatorname{relint} K^*$, т. е. $px > 0$ для всех ненулевых $x \in K$.

А.3. Выполняется какое-либо достаточное условие теоремы о магистрали в сильной форме★.

Пусть q — эффективный функционал в нашей модели [5].

Определение 1. *Траектория $\chi_T = \{y_t\}_0^T$ называется оптимальной, если найдется функционал $f \in K^*$ такой, что $f(y_T) \geqslant f(x_T)$ для любой допустимой траектории $\{x_t\}_0^T$, где $x_0 = y_0$.*

Определение 2. *Бесконечная траектория $\chi = \{y_t\}_0^\infty$ называется оптимальной, если оптимален любой ее отрезок χ_T, $T = 1, 2, \ldots$.*

Определение 3. *Траектория $\{y_t\}_0^\infty$ называется траекторией эффективного синтеза, если $q(y_{t+1}) = \max\{q(y) \mid y \in a(y_t)\}$, $t = 0, 1, \ldots$.*

Поскольку (по определению эффективного функционала) $\max\{q(y) \mid y \in a(x)\} = \alpha q(x)$, то в силу [6] (теорема 1) определения 2 и 3 эквивалентны, т. е. всякая бесконечная оптимальная траектория является траекторией эффективного синтеза, и наоборот. Эффективный функционал можно выбрать так, чтобы $q(\hat{x}) = 1$. Тогда согласно [6] для любой бесконечной оптимальной траектории χ выполняется

$$\alpha^{-t} y_t \xrightarrow[t \to \infty]{} q(y_0)\hat{x}. \tag{1}$$

Определение 4. *Последовательность $\{x(t)\}_0^\infty$ называется траекторией скользящего планирования, или скользящим планом, с горизонтом (периодом скольжения) T, если для каждого $t = 0, 1, \ldots$ существует оптимальная траектория $\{y_\tau(t)\}_{\tau=0}^T$ такая, что $y_0(t) = x(t)$, $y_1(t) = x(t+1)$.*

Здесь $x(0) = y_0(0)$ — начальный запас, $y_\tau(t)$ — рассчитанное в момент t задание на выпуск через τ лет.

Фиксируем произвольную начальную точку x_0, удовлетворяющую

А.4. $q(x_0) > 0$, т. е. (в силу (1)) из x_0 исходит траектория, растущая средним темпом α (определение см. [4], с. 226).

Тогда имеет место

Теорема. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные $T(\varepsilon)$ и $N(\varepsilon)$ такие, что для всякого скользящего плана $\{x(t)\}_0^\infty$ с начальным запасом x_0 и периодом скольжения $T \geqslant T(\varepsilon)$ справедливо*

$$\left\| (x(t), x(t+1)) / \|x(t)\| - (\hat{x}, \alpha\hat{x}) \right\| < \varepsilon ★★ \tag{2}$$

для $t \geqslant N(\varepsilon)$.

★ В общей ситуации обычно предполагают строгость состояния равновесия [4], но в частных случаях — матричных моделях, напр., типа [2] — используют условие примитивности некоторой матрицы и при этом состояние равновесия не является строгим (на это обстоятельство автору указал А. М. Рубинов). Заметим, что оба названных условия гарантируют выполнение А.2. Различного рода более слабые достаточные условия А.3 см. в [5].

★★ Здесь одно и то же обозначение используется для норм в пространствах R^n и R^{2n}.

Замечание 1. В [2] для матричной модели, являющейся частным случаем рассматриваемой нами, построена траектория скользящего планирования, целиком лежащая на некотором луче, близком к неймановскому (тем ближе, чем длиннее период скольжения), но не совпадающем с ним. Этот пример показывает, что утверждение теоремы нельзя усилить. В частности, для доказательства сходимости скользящего плана к магистрали не обойтись без дополнительных предположений.

Замечание 2. Модифицируем определение скользящего плана. Пусть пересмотр плана осуществляется не обязательно ежегодно, а через произвольные интервалы, не превосходящие $T/2$ лет. Можно доказать, что в этом случае теорема остается справедливой.

Доказательство теоремы основано на следующем соображении. Можно показать, что любая достаточно длинная оптимальная траектория на некотором начальном отрезке близка к траектории эффективного синтеза, исходящей из той же начальной точки. Этот факт обнадеживает, поскольку скользящий план склеен из начальных участков различных оптимальных траекторий (так что его можно назвать траекторией приближенного эффективного синтеза), а траектория эффективного синтеза сходится (в смысле (1)) к магистрали.

3. Для доказательства потребуется ряд вспомогательных результатов.

Лемма 1 [7]. *Если $p \in \operatorname{relint} K^*$, то существует константа $\sigma > 0$ такая, что для любого $x \in K$ выполняется*

$$x^{(i)} \leqslant \sigma p x, \quad i=1, \ldots, n. \tag{3}$$

В силу этой леммы функционал p на K является нормой. Не умаляя общности, будем считать, что $\|x\| = px$ для всех $x \in K$.

Пусть β — некоторое положительное число. Обозначим $K_\beta = \{x \in K \mid q(x) \geqslant \beta,\ \|x\| = 1\}$, $\bar{K}_\beta = \operatorname{con} K_\beta$ — коническая оболочка с вершиной в нуле.

Предложение. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется $N_0(\varepsilon)$ такое, что для всех оптимальных траекторий $\chi_T = \{y_t\}_0^T$, где $2N_0(\varepsilon) \leqslant T \leqslant +\infty$, $y_0 \in \bar{K}_\beta$, выполняется*

$$\left\| (y_t, y_{t+1})/\|y_t\| - (\hat{x}, \alpha\hat{x}) \right\| < \varepsilon, \quad t = N_0(\varepsilon), \ldots, T - N_0(\varepsilon), \tag{4}$$

т. е. оценка $N_0(\varepsilon)$ является равномерной для $y_0 \in \bar{K}_\beta$.

Доказательство мы опускаем ввиду его простоты. Достаточно заметить, что в теореме о магистрали в сильной форме (см., напр., [4]) при вычислении $N_0(\varepsilon)$ для траекторий, исходящих из фиксированной точки y_0, по существу используются лишь величины $\|y_0\|$ и $\lim_{t\to\infty} \alpha^{-t} p z_t$ для некоторой траектории $\{z_t\}$ с началом в y_0, растущей средним темпом α.

В дальнейшем нам удобно будет взять $\beta = \min\{q(x_0)/2\|x_0\|,\ 1/2\}$.

Лемма 2. *Пусть $\{y_t\}_0^{T_1}$, $\{z_t\}_0^{T_2}$ — произвольные оптимальные траектории, $y_0 = z_0 \in \bar{K}_\beta$; $T_1, T_2 \leqslant +\infty$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_0(\varepsilon)$ такое, что если $T = \min\{T_1, T_2\} \geqslant 2T_0(\varepsilon)$, то*

$$\alpha^{-t}\|y_t - z_t\| < \varepsilon, \quad t = T_0(\varepsilon), \ldots, T - T_0(\varepsilon). \tag{5}$$

Доказательство. Из предложения, в частности, следует существование $T_0(\varepsilon)$ такого, что если $T \geqslant 2T_0(\varepsilon)$, то

$$\max\left\{\left\|\frac{y_t}{\|y_t\|} - \hat{x}\right\|, \left\|\frac{z_t}{\|z_t\|} - \hat{x}\right\|\right\} < \varepsilon/c, \quad t = T_0(\varepsilon), \ldots, T - T_0(\varepsilon), \tag{6}$$

выбор константы $c > 0$ будет уточнен в конце доказательства. Поскольку функционал p на всех траекториях не возрастает★★★ и $px = \|x\|$, $x \in K$, то величины $\|y_t\|$ и $\|z_t\|$ ограничены сверху числом py_0, так что

$$\|y_t - z_t\| \leqslant \|y_t\| \left\| \frac{y_t}{\|y_t\|} - \hat{x} \right\| + \|z_t\| \left\| \frac{z_t}{\|z_t\|} - \hat{x} \right\| + \Delta \leqslant 2py_0\varepsilon/c + \Delta, \quad (7)$$

где $\Delta = |\, \|y_t\| - \|z_t\| \,|$.

Пусть, для определенности, $\|z_t\| \geqslant \|y_t\|$, так что $\Delta = \|z_t\| - \|y_t\|$. По (6) можно написать $y_t = \|y_t\| \hat{x} + \omega$, $z_t = \|z_t\| \hat{x} + \eta$, где $\max \{\|\omega\|, \|\eta\|\} < \varepsilon/c$. Нетрудно доказать [7], что если $\{\bar{x}_t\}_0{}^T$ — оптимальная, а $\{x_t\}_0{}^T$ — некоторая допустимая траектория с началом в $\bar{x}_0$, то для каждого $t = 0, \ldots, T$ найдется индекс $i = 1, \ldots, n$ такой, что $\bar{x}_t{}^{(i)} \geqslant x_t{}^{(i)}$. Тем самым для каждого $t = 0, \ldots, T$ найдется i такой, что $y_t^{(i)} = \|y_t\| \hat{x}^{(i)} + \omega^{(i)} \geqslant z_t^{(i)} = \|z_t\| \hat{x}^{(i)} + \eta^{(i)}$, отсюда $\omega^{(i)} - \eta^{(i)} \geqslant \geqslant \Delta \hat{x}^{(i)} \geqslant \Delta \min\limits_{i=1,\ldots,n} \hat{x}^{(i)}$. В то же время по (3) имеем $|\omega^{(i)} - \eta^{(i)}| \leqslant \leqslant \sigma(\|\omega\| + \|\eta\|) < 2\sigma\varepsilon/c$. Таким образом, $\Delta \leqslant 2\sigma\varepsilon/c \min \hat{x}^{(i)}$ и, в силу (7), для завершения доказательства достаточно взять $c = = 2(py_0 + \sigma/\min \hat{x}^{(i)})$.

Лемма 3. *Для любого $\delta > 0$ найдется $T_1(\delta)$ такое, что если $2T_1(\delta) \leqslant T \leqslant +\infty$, то для всякой оптимальной траектории $\{y_t\}_0{}^T$ длины T с началом в $y_0 \in \bar{K}_\beta$ выполняется*

$$0 \leqslant \frac{q(y_t)}{\alpha^t} - \frac{q(y_{t+1})}{\alpha^{t+1}} \leqslant \delta, \quad t = 0, \ldots, T - T_1(\delta) - 1. \quad (8)$$

Доказательство. Пусть $\{x_t{}^*\}_0{}^\infty$ — некоторая траектория эффективного синтеза, $x_0{}^* = y_0$. В силу непрерывности q [6] существует $\varepsilon' > 0$ такое, что из $\|x_1 - x_2\| \leqslant \varepsilon'$ следует $|q(x_1) - q(x_2)| \leqslant \delta$. Для этого ε', согласно лемме 2, можно найти $T_0(\varepsilon')$ такое, что для $t = T_0(\varepsilon'), \ldots, T - T_0(\varepsilon')$ имеет место $\|y_t - x_t{}^*\| \leqslant \varepsilon'$, тем самым

$$0 \leqslant q(x_t^*) - q(y_t) \leqslant \delta, \quad t = T_0(\varepsilon'), \ldots, T - T_0(\varepsilon'). \quad (9)$$

Здесь левое неравенство следует из определения эффективного функционала: величина $q(\cdot)$ не возрастает на любой допустимой траектории и постоянна на траекториях эффективного синтеза. Заметим, что

$$q(x_t^*) - q(y_t) = \sum_{\tau=0}^{t-1} [(q(x_{\tau+1}^*) - q(y_{\tau+1})) - (q(x_\tau^*) - q(y_\tau))].$$

В силу предыдущего рассуждения выражения в квадратных скобках неотрицательны, так что по (9) имеем

$$0 \leqslant (q(x_{\tau+1}^*) - q(y_{\tau+1})) - (q(x_\tau^*) - q(y_\tau)) \leqslant \delta$$

или

$$0 \leqslant q(y_\tau) - q(y_{\tau+1}) \leqslant \delta, \quad \tau = 0, 1, \ldots, T - T_0(\varepsilon'),$$

что и означает требуемое, если переобозначить $T_1(\delta) = T_0(\varepsilon')$.

★★★ Для простоты, не умаляя общности, здесь и далее в доказательствах будем считать $\alpha = 1$.

Положим $P(\gamma) = \{x \in C \mid q(x) = \gamma\}$, где C — некоторый компакт в R_+^n, $\gamma \geqslant 0$ — число. Обозначим $\varrho(x, A) = \inf \{\|x-y\| \mid y \in A\}$ — расстояние между точкой x и множеством A.

Лемма 4. *Для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $|q(x) - \gamma| < \delta$, $x \in C$, то $\varrho(x, P(\gamma)) < \varepsilon$* ★★★★.

Доказательство. Предположим противное: существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого $\delta > 0$ имеет место $\varrho(x, P(\gamma)) \geqslant \varepsilon$ при $|q(x) - \gamma| < \delta$. Возьмем последовательность значений δ: $\{\delta_n = 1/n\}$ и соответствующую последовательность $\{x_n\}$ таких, что $|q(x_n) - \gamma| < 1/n$. В силу компактности C из $\{x_n\}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность, причем предел $\bar{x} \in C$. В силу непрерывности эффективного функционала $q(\bar{x}) = \gamma$. Но $\varrho(\bar{x}, P(\gamma)) \geqslant \varepsilon$. Противоречие доказывает лемму.

Обозначим $Q^l(y) = \operatorname{argmax} \{q(z) \mid z \in a^l(y)\}$, где l — натуральное число, $a^l = a \circ a \circ \ldots \circ a$ — композиция l отображений a.

Лемма 5. *Для любых $\varepsilon > 0$ и натурального N существует $T_2(N, \varepsilon)$ такое, что если период скольжения $T \geqslant T_2(N, \varepsilon)$, то найдется траектория эффективного синтеза $\{x_t^*\}_0^\infty$ с началом в x_0 такая, что*

$$\alpha^{-t}\|x(t) - x_t^*\| < \varepsilon, \quad t = 0, 1, \ldots, 2N. \tag{10}$$

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Положим $C_t = a^t(x_0)$, $\gamma = q(x_0)$, тогда $P_t(\gamma) = Q^t(x_0)$, где $t = 1, 2, \ldots, 2N$, и по ε, согласно лемме 4, найдем соответствующие δ_t. Возьмем $\delta = \min \{\delta_1, \ldots, \delta_{2N}, q(x_0)/2\}$. Применяя последовательно лемму 3 к оптимальным траекториям, исходящим из точек $x(t-1)$, $t = 1, 2, \ldots, 2N$, по определению скользящего плана получим, что найдется величина $T_1(\delta/2N)$ такая, что если период скольжения $T \geqslant 2T_1(\delta/2N)$, то $0 \leqslant q(x(t-1)) - q(x(t)) \leqslant \delta/2N$ (заметим, что по выбору δ для всех $t = 1, 2, \ldots, 2N$ имеем $q(x(t-1)) > q(x_0) - (t-1)\delta/2N > q(x_0)/2$, но $\|x(t-1)\| \leqslant px_0 = \|x_0\|$, так что $q(x(t-1))/\|x(t-1)\| > q(x_0)/2\|x_0\| \geqslant \beta$, т. е. $x(t-1) \in \bar{K}_\beta$, $t = 1, 2, \ldots, 2N$). Таким образом, для $T \geqslant T_2(N, \varepsilon) = 2T_1(\delta/2N)$ имеем

$$0 \leqslant q(x_0) - q(x(t)) \leqslant \delta \leqslant \delta_t, \quad t = 1, 2, \ldots, 2N.$$

Отсюда, применяя лемму 4 к соответствующим C_t, получим требуемое.

Следствие. *В условиях леммы 5 существует $T_3(N, \varepsilon)$ такое, что если $T \geqslant T_3(N, \varepsilon)$, то*

$$\Delta_t = \left\| \frac{(x(t), x(t+1))}{\|x(t)\|} - \frac{(x_t^*, x_{t+1}^*)}{\|x_t^*\|} \right\| < \varepsilon, \quad t = 0, 1, \ldots, 2N-1. \tag{11}$$

Доказательство. Поскольку траектория $\{x_t^*\}$ растет средним темпом $\alpha = 1$, то величина $\|x_t^*\|$ ограничена снизу некоторой константой $\Gamma > 0$. Кроме того, заметим, что $\|x(t+1)\| \leqslant \|x(t)\|$.

$$\Delta_t = \left\| \frac{x(t)}{\|x(t)\|} - \frac{x_t^*}{\|x_t^*\|} \right\| + \left\| \frac{x(t+1)}{\|x(t)\|} - \frac{x_{t+1}^*}{\|x_t^*\|} \right\| \leqslant$$

★★★★ Легко видеть, что это означает полунепрерывность сверху [4] (с. 60) отображения $P : [0, +\infty) \to C$.

$$\leqslant \frac{1}{\|x_t^*\|}\|x(t)-x_t^*\|+\frac{1}{\|x_t^*\|}\Big|\|x_t^*\|-\|x(t)\|\Big|+\frac{1}{\|x_t^*\|}\|x(t+1)-x_{t+1}^*\|+$$

$$+\frac{\|x(t+1)\|}{\|x(t)\|\|x_t^*\|}\Big|\|x_t^*\|-\|x(t)\|\Big|\leqslant\frac{3}{\|x_t^*\|}\|x(t)-x_t^*\|+$$

$$+\frac{1}{\|x_t^*\|}\|x(t+1)-x_{t+1}^*\|.$$

Отсюда, если $T \geqslant T_3(N, \varepsilon) = T_2(N, \Gamma\varepsilon/4)$, то для $t = 0, 1, \ldots, 2N-1$ в силу леммы 5 имеем $\Delta_t < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы. Положим $N = N(\varepsilon) = N_0(\varepsilon/2)$, тогда в силу предложения и следствия выполняется (2) для $t = N, N+1, \ldots, 2N-1$, если период скольжения $T \geqslant T(\varepsilon) = T_3(N, \varepsilon/2)$. Заметим, что отсюда и в силу монотонности эффективного функционала $q(x(N))/\|x(N)\| \geqslant q(\beta_0\hat{x}) = \beta_0 > \beta$, где $\beta_0 = 1 - \varepsilon/\min \hat{x}^{(i)}$ (не умаляя общности, считаем $\varepsilon < \min \hat{x}^{(i)}/2$), так что аналогичным образом можно доказать выполнение (2) для $t = 2N, \ldots, 3N-1$ и т. д. для всех $t \geqslant N(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Автор выражает признательность В. М. Полтеровичу, предложившему тему настоящего исследования, и А. М. Рубинову, высказавшему ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Goldman, S., Rev. Econ. Stud., **35**, № 2, 145—154 (1968).
2. Березнева Т. Д., Экономика и матем. методы, **12**, № 4, 740—746 (1976).
3. Полтерович В. М., Экономика и матем. методы, **15**, № 4, 760—773 (1979).
4. Макаров В. Л., Рубинов А. М., Математическая теория экономической динамики и равновесия, М., «Наука», 1973.
5. Рубинов А. М., Докл. АН СССР, **242**, № 2, 287—289 (1978).
6. Рубинов А. М., В сб.: Оптимизация, вып. 17 (34), Новосибирск, «Наука», 1975, с. 40—45.
7. Каганович М. И., Экономика и матем. методы, **15**, № 5, 994—1001 (1979).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
28/VI 1979

M. KAGANOVITŠ

LIBISEV PLANEERIMINE VON NEUMANN — GALE'I MUDELIS

Majandusliku kasvu teoorias on iseloomulik selline ülesande püstitus, mille korra optimaalse trajektoori valik on täielikult määratud algmomendil. Käesolevas töös vaadeldav alternatiivne pikaajaline plaani jooksva korrigeerimise printsiip — libisev planeerimine — seisneb selles, et iga aasta lõpul leitakse optimaalne trajektoor uuesti, võttes algmomendiks jooksva oleku. Seejuures jääb planeerimishorisont konstantseks, kuid sihifunktsioonid võivad iga kord muutuda. Üldjuhul ei moodusta selliselt konstrueeritud libisev plaan optimaalset trajektoori. Käesolevas töös on näidatud, et kui kasutada von Neumann — Gale'i mudelis magistraaliteoreemi tingimusi tugeval kujul ja küllalt suurt planeerimishorisonti, on iga libisev plaan teatud momendist alates von Neumanni kiire väikeses ümbruses.

M. KAGANOVICH

REVISED PLANNING IN A VON NEUMANN—GALE MODEL

A great number of papers on the theory of economic growth deal with construction and analysis of optimal paths being chosen according to some objective under given initial conditions. Such statement of a problem means that a decision (i. e. the choice of an optimal path) is made up at the initial moment. We consider an alternative schedule — a current correction of a long-term plan which, according to the so-called concept of sliding or revised planning, proceeds as follows: at the end of every year an optimal path is computed anew, taking the current state for the initial point, the (finite) planning horizon remaining constant, and the objectives being allowed to vary each time. Thus constructed, the revised plan need not be, in general, an optimal path. Nevertheless, for the case of von Neumann—Gale model, it is shown that the former possesses some asymptotic properties of the previou sones — namely, under the assumptions of the turnpike theorem in a strong form coupled with a sufficiently long planning horizon, any revised plan lies, beginning with a certain moment, in a arbitrarily small neighbourhood of the von Neumann ray.