EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1979.4.03

УДК 519.835.62+519.856

Р. ЛЕПП

МАКСИМИЗАЦИЯ ФУНКЦИИ ВЕРОЯТНОСТИ НА ПРОСТЫХ МНОЖЕСТВАХ

(Представлена Х. Абеном)

1. Рассмотрим задачу стохастического программирования в r-мерном евклидовом пространстве R^r

$$\max_{x\in X} P_\xi[f(x,\xi)<t]. \tag{1}$$

Здесь $\xi=\xi(\omega)$ — вектор случайных параметров, отображающий вероятностное пространство (Ω,Σ,P) в (R^m,B,P_ξ); $f(x,\xi)$ — действительная функция, определенная на $R^r\times R^m$; t — фиксированное число, $P_\xi(\cdot)$ — индуцированная вектором ξ мера в R^m. Множество $X\subset R^r$ «простое», т. е. на X можно эффективно решать вспомогательные задачи типа максимизации линейной или квадратичной функции [1]. В дальнейшем X будем считать выпуклым компактом.

Решение задачи (1) с помощью итеративных методов, использующих значения функции $v(x,t)$ и ее производной, возможно лишь в редких случаях даже при известном распределении случайного вектора ξ в выражении

$$v(x,t)=P_\xi[f(x,\xi)<t], \tag{2}$$

что связано с большими вычислительными трудностями из-за размерности пространства R^m. Во многих же задачах законы распределения вовсе не заданы. Поэтому значительный интерес представляют прямые методы решения задачи (1), основанные на оценках функции вероятности $v(x,t)$ и ее производной. В [2] был рассмотрен метод максимизации функции $v(x,t)$, который заключался в замене производной от $v(x,t)$ по x оценкой ее конечно-разностной аппроксимации. В основу такого подхода был положен построенный в [3] алгоритм минимизации функции псевдоградиентным методом. Однако заданные в [2] условия, при которых $v'_x(x,t)$ удовлетворяет условию Липшица, весьма трудно поддаются проверке. Поэтому более удобной оказывается методика, разработанная Е. А. Нурминским [4], которая позволяет обобщить теоремы Зангвилла [5] о сходимости алгоритмов решения задач нелинейного программирования.

Пусть X^* — множество решений задачи (1). Выбор метода для ее решения зависит от описания множества X^*. Если $v(x,t)$ дифференцируема по x, то множество решений X^* можно представить в виде

$$X^*=\{x^*\in X:(v'_x(x^*,t),x-x^*)\leqslant 0 \text{ для всех } x\in X\} \tag{3}$$

или в виде

$$X^* = \{x^* \in X : x^* = \pi(x^* + \varrho v'_x(x^*, t)) \text{ для всех } \varrho > 0\}, \tag{4}$$

где $\pi(y)$ — проекция точки y на множество X. Метод линеаризации и метод проекции градиента можно рассматривать как итерационные способы проверки условий (3) и (4) соответственно. Метод для решения задачи (1) считается сходящимся, если предел любой почти наверное (п. н.) сходящейся подпоследовательности x_{n_k} последовательности x_n, построенной каким-либо методом, принадлежит п. н. множеству X^*.

При каждом фиксированном x функция $v(x, t)$ от t является функцией распределения случайной величины $f(x, \xi)$. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные векторы, распределение которых совпадает с распределением вектора ξ. Тогда $f(x, \xi_1), \ldots, f(x, \xi_n)$ — независимые случайные величины с распределением $v(x, t)$. Для построения дифференцируемой по x оценки функции $v(x, t)$ воспользуемся оценкой Парзена [6], которая в данном случае принимает вид

$$v_n(x, t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{t} K\left(\frac{\tau - f(x, \xi_i)}{h_n}\right) d\tau, \tag{5}$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = 0, \quad \lim\limits_{n\to\infty} nh_n = \infty,$ (6)

и непрерывная функция действительной переменной $K(y)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} K(y)\, dy = 1, \qquad \sup_{-\infty < y < \infty} |K(y)| < \infty, \\ &\int_{-\infty}^{\infty} yK(y)\, dy = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} |yK(y)|\, dy < \infty. \end{aligned} \tag{7}$$

Производную оценки $v_n(x, t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ можно выписать в следующем виде

$$v'_{nx}(x, t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = -\frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^{n} f'_x(x, \xi_i) K\left(\frac{t - f(x, \xi_i)}{h_n}\right). \tag{8}$$

Условия дифференцируемости функции $v(x, t)$ по x довольно громоздки и малоинформативны. Один вариант таких условий приведен в [7]. В дальнейшем будем предполагать, что производные $v'_x(x, t)$ и $v''_{xt}(x, t)$ существуют для всех $x \in X$ и $t \in R^1$.

Лемма. *Если $v''_{xt}(x, t)$ равномерно ограничена для всех $t \in R^1$, $x \in X$ и существует числовая функция $R(\xi)$ такая, что*

$$\int_{R^m} R(\xi)\, dP_\xi(\xi) < \infty \quad и \quad \|f'_x(x, \xi)\| \leqslant R(\xi)$$

при любом $x \in X$, тогда $v'_{nx}(x, t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ сходится п. н. равномерно по $x \in X$ к $v'_x(x, t)$.

Доказательство. При сделанных предположениях о $K(y)$ и $f'_x(x, \xi)$ справедлив аналог следствия (4.1) из [8]:

$$P[\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in X} \|v'_{nx}(x, t, \xi_1, \ldots, \xi_n) - Ev'_{nx}(x, t, \xi_1, \ldots, \xi_n)\| = 0] = 1, \tag{9}$$

т. е. $v'_{nx}(x, t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ сходится п. н. равномерно по $x \in X$ к

$Ev'_{nx}(x, t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, где E — знак математического ожидания. Известно [9], что

$$Ev'_{nx}(x, t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = v'_x(x, t) - h_n \int_{-\infty}^{\infty} yK(y)\, v''_{xt}(x, t-\theta h_n y)\, dy,$$

где $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. При условиях, наложенных на равномерную ограниченность $v''_{xt}(x, t)$, на $K(y)$ и на h_n, имеем, что

$$\lim_{n\to\infty} Ev'_{nx}(x, t, \xi_1, \ldots, \xi_n) = v'_x(x, t) \tag{10}$$

равномерно на множестве X. Суммируя (9) и (10), получим требуемый результат.

2. Метод линеаризации. Определим множество решений X^* задачи (1) в виде (3). Рассмотрим случайную последовательность x_n, заданную соотношениями

$$\begin{gathered} x_0 \in X, \\ x_{n+1} = x_n + \varrho_n(\bar{x}_n - x_n), \\ (v'_{nx}(x_n, t, \xi_1, \ldots, \xi_n), \bar{x}_n) = \max_{x\in X} (v'_{nx}(x_n, t, \xi_1, \ldots, \xi_n), x), \end{gathered} \tag{11}$$

где $v'_{nx}(x_n, t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ дается соотношением (8).

Разъясним случайную природу последовательности x_n. При каждом n случайный вектор x_n определяется на σ-алгебре F_{n-1}, порожденной случайными векторами $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$. Отдельные реализации случайной последовательности x_n как случайные величины задаются на пространстве представлений с σ-алгеброй F, индуцированной расширяющейся последовательностью σ-алгебр F_n. Это пространство мы обозначим через (Ξ, F, μ), где $\mu(\Xi) = 1$, $\Xi = \prod_{i=1}^{\infty} R_i^m$ и $\mu(\cdot)$ — индуцированная мера на (Ξ, F). Элементы множества Ξ обозначим через ξ^∞.

Теорема 1. *Если выполнены условия леммы,* $0 \leqslant \varrho_n \leqslant 1$, $\varrho_n \to 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \varrho_n = \infty$ *и* $v(x, t)$ *принимает на* X^* *конечное число значений, то предельные точки последовательности* x_n *принадлежат п. н. множеству* X^*.

Доказательство. Воспользуемся методикой из [4]. Пусть существует подпоследовательность x_{n_k}, которая сходится, но не к точке множества X^*, т. е.

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}(\xi^{n_k-1}) = x'(\xi^\infty) \notin X^*, \quad \text{где } \xi^s = (\xi_1, \ldots, \xi_s),$$

для всех $\xi^\infty \in B \subset \Xi$ и $\mu(B) > 0$. Без ограничения общности примем, что $B = \Xi$. Тогда для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\Delta > 0$ такая, что $\mu(\Xi_1) \geqslant 1 - \varepsilon_1$, где

$$\Xi_1 = \{\xi^\infty : (v'_x(x'(\xi^\infty), t), x - x'(\xi^\infty)) \geqslant \Delta\}.$$

В дальнейшем будем считать, что $\xi^\infty \in \Xi_1$. В силу непрерывности функции $(v'_x(x, t), y - x)$ по x найдется индекс $N = N(\xi^\infty)$ такой, что при $k \geqslant N$ и всех $n \geqslant n_k$

$$(v'_x(x_{n_k}, t), x - x_n) \geqslant \Delta/2$$

для всех $x \in X$. Покажем, что вся последовательность x_n, начиная с некоторого номера n_k, не может находиться внутри ε-окрестности точки x_{n_k}. Допустим существование $N'(\xi^\infty)$ такого, что при достаточно малом ε и всех $k > N'$ имеет место $\|x_s - x_{n_k}\| < \varepsilon$ для любого $s > n_k$. Тогда

$$\begin{gathered}v(x_s, t) - v(x_{n_k}, t) = (v'_x(x_{n_k}, t),\ x_s - x_{n_k}) + o(\varepsilon) = \\ = (v'_x(x_{n_k}, t),\ \sum_{n=n_k}^{s-1} \varrho_n (\bar{x}_n - x_n)) + o(\varepsilon).\end{gathered} \tag{12}$$

Согласно лемме 1, $v'_{nx}(x, t, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ сходится п. н. равномерно по $x \in X$ к $v'_x(x, t)$, т. е. для любого $\delta > 0$ при всех $\xi^\infty \in \Xi_1$ найдется $N''_\delta(\xi^\infty)$ такой, что при любом $n \geqslant N''_\delta(\xi^\infty)$

$$\|v'_{nx}(x,\ t,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n) - v'_x(x,\ t)\| < \delta.$$

Следовательно, при достаточно большом k

$$\begin{gathered}\max_{x \in X} (v'_{n_k x}(x_{n_k},\ t,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n_k}),\ x - x_n) = \\ = (v'_{n_k x}(x_{n_k},\ t,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_{n_k}), \bar{x}_n - x_n) \geqslant \Delta/4\end{gathered}$$

и

$$(v'_x(x_{n_k}, t), \bar{x}_n - x_n) \geqslant \Delta/8.$$

Тогда из (12) вытекает

$$v(x_s, t) - v(x_{n_k}, t) \geqslant \Delta/8 \sum_{n=n_k}^{s-1} \varrho_n + o(\varepsilon), \tag{13}$$

что при $s \to \infty$ противоречит ограниченности левой части этого неравенства. Стало быть, существует номер

$$m_k(\xi^\infty) = \min\{n : n > n_k,\ \|x_n - x_{n_k}\| \geqslant \varepsilon\}$$

такой, что $m_k < \infty$.

По определению $\|x_{m_k} - x_{n_k}\| \geqslant \varepsilon$ и $\|x_{m_k-1} - x_{n_k}\| < \varepsilon$. Но поскольку

$$\|x_{m_k} - x_{n_k}\| \leqslant \|x_{m_k} - x_{m_k-1}\| + \|x_{m_k-1} - x_{n_k}\|$$

и в силу ограниченности множества X

$$\|x_{m_k} - x_{m_k-1}\| = \varrho_{m_k-1} \|\bar{x}_{m_k-1} - x_{m_k-1}\| \leqslant \varrho_{m_k-1} L$$

и $\varrho_n \to \infty$ при $n \to \infty$, то при достаточно большом k

$$\|x_{m_k} - x_{n_k}\| < 2\varepsilon \quad \text{при} \quad \xi^\infty \in \Xi_2,\ \mu(\Xi_2) \geqslant 1 - 2\varepsilon_1.$$

Следовательно, неравенство (13) остается в силе и для $s = m_k$, т. е.

$$v(x_{m_k}, t) - v(x_{n_k}, t) \geqslant \Delta/8 \sum_{n=n_k}^{m_k-1} \varrho_n + o(2\varepsilon).$$

Но $\varepsilon < \|x_{m_k} - x_{n_k}\| \leqslant \sum_{n=n_k}^{m_k-1} \varrho_n \|\bar{x}_n - x_n\| \leqslant L \sum_{n=n_k}^{m_k-1} \varrho_n$, откуда

$$\sum_{n=n_k}^{m_k-1} \varrho_n > \varepsilon/L$$

и

$$v(x_{m_k}, t) \geqslant v(x_{n_k}, t) + \Delta\varepsilon/8L + o(2\varepsilon). \tag{14}$$

Без ограничения общности допустим, что существуют $\lim_{k\to\infty} v(x_{m_k}, t) = d''$ и $\lim_{k\to\infty} v(x_{n_k}, t) = d'$. Тогда $d'' \geqslant d' + \Delta\varepsilon/8L$.

Выберем из (d', d'') числа a и b такие, что для любого $x^* \in X^*$ либо $v(x^*, t) < a$, либо $v(x^*, t) > b$. Это возможно в силу предположения о конечности числа значений $v(x, t)$ на X^*. Последовательность $v(x_n, t)$ пересекает интервал (a, b) сверху вниз [10] бесконечное число раз. Выберем последовательности индексов $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ так, чтобы $p_k < q_k$, $v(x_{p_k}, t) \leqslant b$, $v(x_{q_k}, t) \leqslant a$, $a < v(x_s, t) < b$, $p_k < s < q_k$. Соответствующим выбором последовательности пар (p_k, q_k) всегда можно добиться того, чтобы последовательность x_{p_k} сходилась. Пусть $\lim_{k\to\infty} x_{p_k} = x''$. Так как

$$0 \geqslant b - v(x_{p_k}, t) \geqslant v(x_{p_k+1}, t) - v(x_{p_k}, t)$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0, \text{ то } \lim_{k\to\infty} v(x_{p_k}, t) = b,$$

следовательно, вновь можно найти номер $s_k < \infty$ такой, что

$$s_k = \min\{s : s > p_k,\ \|x_s - x_{p_k}\| > \varepsilon\}.$$

При достаточно малом $\varepsilon > 0$ и достаточно большом k верно $p_k < s_k < q_k$. Тем самым для всех $\xi^\infty \in \Xi_2$, $\mu(\Xi_2) \geqslant 1 - 2\varepsilon_1$

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} v(x_{s_k}, t) \leqslant \lim_{k\to\infty} v(x_{p_k}, t) = b.$$

Но неравенство (14) дает, в силу произвольности $\varepsilon_1 > 0$,

$$\underline{\lim}_{k\to\infty} v(x_{s_k}, t) > \lim_{k\to\infty} v(x_{p_k}, t).$$

Полученное противоречие доказывает теорему.

Замечание 1. Метод стохастической линеаризации был изучен в [11] для локально липшицевых функций и в [12] для выпуклых функций.

3. **Метод проекции градиента.** Определим множество решений X^* задачи (1) в виде (4). Рассмотрим случайную последовательность x_n, заданную соотношениями

$$x_0 \in X,$$
$$x_{n+1} = \pi(x_n + \varrho_n v'_{nx}(x_n, t, \xi_1, \ldots, \xi_n)). \qquad (15)$$

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы* 1, *то предельные точки последовательности x_n, определенной соотношением* (15), *п. н. принадлежат множеству X^*, определенному соотношением* (4).

Доказательство. Пусть существует подпоследовательность x_{n_k}, которая сходится, но не к точке множества X^* для почти всех $\xi^\infty \in \Xi$. Тогда для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется $\Delta > 0$ такая, что $\mu(\Xi_1) \geqslant 1 - \varepsilon_1$, где

$$\Xi_1 = \{\xi^\infty : \|x'(\xi^\infty) - \pi(x'(\xi^\infty) + v'_x(x'(\xi^\infty), t))\| \geqslant \Delta > 0\}.$$

Покажем, что при достаточно большом k и всех $n \geqslant n_k$

$$(v'_x(x_n, t),\ \pi(x_n + \varrho_n v'_x(x_n, t)) - x_n) \geqslant \varrho_n \Delta^2/4.$$

2*

Известно, что при $0 \leqslant \varrho \leqslant 1$

$$\varrho\|x-\pi(x+v'_x(x,t))\| \leqslant \|x-\pi(x+\varrho v'_x(x,t))\|$$

и (16)

$$\varrho(v'_x(x,t),\ \pi(x+\varrho v'_x(x,t))-x) \geqslant \|\pi(x+\varrho v'_x(x,t))-x\|^2$$

(см., напр., [13]). При достаточно большом k и всех $n \geqslant n_k$

$$\|x_n-\pi(x_n+v'_x(x_n,t))\| \geqslant \Delta/2$$

и

$$\|x_n-\pi(x_n+\varrho_n v'_x(x_n,t))\| \geqslant \varrho_n\,\|x_n-\pi(x_n+v'_x(x_n,t))\| \geqslant \varrho_n\Delta/2.$$

Из неравенства (16) получим теперь

$$(v'_x(x_n,t),\ \pi(x_n+\varrho_n v'_x(x_n,t))-x_n) \geqslant \varrho_n\Delta^2/4.$$

Так как

$$\begin{aligned}&|(v'_x(x_n,t),\ \pi(x_n+\varrho_n v'_{nx}(x_n,\ t,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n))-x_n)-\\&-(v'_x(x_n,t),\ \pi(x_n+\varrho_n v'_x(x_n,t))-x_n)| \leqslant\\&\leqslant M\varrho_n(\|v'_{nx}(x_n,\ t,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)-Ev'_{nx}(x_n,\ t,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)\|+\\&+\|Ev'_{nx}(x_n,\ t,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n)-v'_x(x_n,t)\|),\end{aligned}$$

где M — некоторая константа, то в силу леммы и того, что $\varrho_n \to 0$, имеем, начиная с некоторого k,

$$(v'_x(x_{n_k},t),\ \pi(x_n+\varrho_n v'_{nx}(x_n,\ t,\ \xi_1,\ \ldots,\ \xi_n))-x_n) \geqslant \varrho_n\Delta^2/16.$$

Следовательно, может быть получено неравенство

$$v(x_s,t)-v(x_{n_k},t) \geqslant \Delta^2/16\sum_{n=n_k}^{s-1}\varrho_n+o(\varepsilon),$$

аналогичное неравенству (13). Остальная схема доказательства та же, что и доказательства теоремы 1.

З а м е ч а н и е 2. Метод стохастической аппроксимации проекции градиента был предложен в [14]. Однако функция $v(x,t)$ не удовлетворяет заданным там условиям.

ЛИТЕРАТУРА

1. П о л я к Б. Т., В кн.: Итоги науки и техники. Математический анализ, т. 12, М., ВИНИТИ, 1974, с. 147—197.
2. Ю б и Э. А.-Ю., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, № 411, 57—76 (1976).
3. П о л я к Б. Т., Ц ы п к и н Я. З., Автоматика и телемеханика, № 3, 45—68 (1973).
4. Н у р м и н с к и й Е. А., Кибернетика, № 6, 79—81 (1972).
5. З а н г в и л л У. И., Нелинейное программирование. Единый подход, М., «Сов. радио», 1973.
6. P a r z e n, E., Ann. Math. Statistics, **33**, № 3, 1065—1076 (1962).
7. Р а й к Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **24**, № 1, 3—9 (1975).
8. L e C a m, L., Univ. Calif. Public. Statistics, **1**, № 11, 277—330 (1953).
9. Т а м м Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **28**, № 1, 17—24 (1979).
10. Н е в ё Ж., Математические основы теории вероятностей, М., «Мир», 1969.
11. Е р м о л ь е в Ю. М., Методы стохастического программирования, М., «Наука», 1976.
12. Г у п а л А. М., Б а ж е н о в Л. Г., Кибернетика, № 3, 116—117 (1972).
13. К а р м а н о в В. Г., Математическое программирование, М., «Наука», 1975.
14. H i r i a r t - U r r u t y, J. B., Ann. Sci. l'Univ. Clermont, № 58, 110—131 (1976).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
17/VII 1979

R. LEPP

TÕENÄOSUSFUNKTSIOONI MAKSIMEERIMINE LIHTSATE KITSENDUSTE KORRAL

Ülesande $\max_{x \in X} P_{\xi}[f(x, \xi) < t]$ lahendamiseks on kasutatud tingliku gradiendi ja gradiendi projektsiooni meetodit, kusjuures gradiendi hindamiseks juhusliku vektori ξ realisatsioonide kaudu on kasutatud Parzeni tuuma tüüpi hinnangut [6]. Saadud jada piirpunktid rahuldavad ülesande lahendi tarvilikke tingimusi.

R. LEPP

MAXIMIZATION OF THE PROBABILITY FUNCTION IN SIMPLE CONSTRAINTS

This paper is concerned with two algorithms for finding a maximum of probability function $v(x, t) = P_{\xi}[f(x, \xi) < t]$ in X, where $X \subset R^r$ is a convex closed and bounded set, in which we can efficiently solve auxiliary linear or quadratic programming problems; ξ is a m-dimensional random vector with unknown distribution and the real number t is fixed. Basing on independent realizations of the random vector ξ, the Parzen kernel-type [6] differentiable in x estimate of $v(x, t)$ is constructed. It is shown that limit points of the sequences generated by linearization and gradient projection methods, satisfy the necessary conditions for maximality with the probability one.