EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 28. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1979, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 28
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1979, № 4

УДК 539.3

Ю. ЭНГЕЛЬБРЕХТ

СВЯЗАННЫЕ ВОЛНЫ ДЕФОРМАЦИИ В НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

(Представлена Н. Алумяэ)

Классический лучевой метод [1] описывает коротковолновую асимптотику волнового поля в неоднородной среде по линейной модели. С развитием различных модификаций лучевого метода, а вместе с ними и математического аппарата для решения проблем физики плазмы [2], радиофизики [3] и нелинейной акустики [4] стало возможным исследование и нелинейных задач. Однако как в упомянутых, так и в других работах главное внимание уделяется волнам, генерированным краевым воздействием. Покажем здесь, что развитый для анализа нелинейных волн вариант лучевого метода [2, 3, 5] позволяет учитывать при определении волнового поля и те волны, которые идут в обратном по сравнению с генерированными волнами направлении.

Пусть одномерный переходный волновой процесс деформации в неоднородной среде описывается матричным уравнением

$$I\,\partial\mathbf{U}/\partial t+A\,\partial\mathbf{U}/\partial X+\sum_{p=2}B_{rs}\,\partial^p\mathbf{U}/\partial X^r\,\partial t^s+K\,\partial\mathbf{F}/\partial X+\mathbf{C}=0. \qquad (1)$$

Здесь $\mathbf{U}$ — неизвестный вектор полевых величин u_i, $i=1,2,\ldots,n$; I — единичная матрица; $\mathbf{F}$ — известный вектор, характеризующий изменение модулей упругости; $A(X,\mathbf{U})$, $B_{rs}(X,\mathbf{U})$, $K(X,\mathbf{U})$ — матрицы-коэффициенты, содержащие переменные скорости волн; $\mathbf{C}(X,\mathbf{U})$ — вектор, который в зависимости от уравнения состояния может содержать также интегральные операторы. В общем случае уравнение (1) — это уравнение смешанного типа, но его главная часть является гиперболической, поскольку обычно выполняется $B_{rs}\sim O(\varepsilon)$, где ε — малый параметр. Построим для уравнения (1) асимптотическое решение

$$\mathbf{U}=\sum_{i=0}\varepsilon^i\mathbf{U}_i$$

с граничными условиями

$$\mathbf{U}(X,t)\,|_{t=0}=0,\ \mathbf{U}(X,t)\,|_{X=0}=\vec{\Phi}(t)\,[H(t)-H(t-t_0)],$$

где $H(t)$ — функция Хевисайда, t_0 — продолжительность импульса. Для решения задачи применим модифицированный вариант лучевого метода [2, 3, 5], который в нелинейной постановке ведет к построению нелинейных уравнений переноса вдоль определенных из ассоциированного гиперболического уравнения бихарактеристик. Будем считать, что выполняются все требования относительно зависимых переменных и коэффициентов уравнения (1) [6]. Индекс «0» далее обозначает первый член разложения, причем $A_0 = A_0(X)$, $B_{0rs} = \text{const}$, $\mathbf{C}_0 = 0$. Тогда ассоциированное уравнение с учетом предположения $\mathbf{F} \sim O(\varepsilon)$ определяет скорости λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, отдельных простых волн. Выбирая лучевые координаты в виде

$$\xi_j = t - \int_0^X (\lambda_j(x))^{-1}\, dx, \quad \tau = \varepsilon X, \tag{2}$$

получим из уравнения (1) в первом приближении

$$\sum_{j=1}^{n} (I - \lambda_j^{-1} A_0)\, \partial U_0 / \partial \xi_j = 0,$$

откуда

$$\mathbf{U}_0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(\xi_i, \tau)\, \mathbf{r}_i. \tag{3}$$

Величины $\mathbf{l}_i$ и $\mathbf{r}_i$ — левые и правые собственные векторы матрицы A_0 при $\lambda = \lambda_i$, а α_i — амплитудный фактор. Подчеркнем, что если неоднородность проявляется слабо, тогда $\lambda_j = \lambda_{0j} + O(\varepsilon)$, $\lambda_{0j} = \text{const}$ и взамен (2) можно использовать преобразование

$$\xi_j = \lambda_{0j} t - X, \quad \tau = \varepsilon X, \tag{4}$$

которое тоже приводит к соотношению (3). Этот результат свидетельствует о том, что в основу анализа взято разложение по простым волнам. Чтобы облегчить выкладки, построим уравнения переноса для случая слабой неоднородности (4), принимая $\tau_n = \varepsilon X_n$; $X_n = X$, если $n = 1, 3, \ldots$, и $X_n = -(X - X_0)$, если $n = 2, 4, \ldots$. Здесь нечетные n обозначают волны, идущие в сторону нарастания координаты X (направо), а четные n — волны, идущие в сторону убывания координаты X (налево). Уравнение переноса первого порядка в этом случае для каждой i-й волны принимает вид

$$a_{i0}\, \partial \alpha_i / \partial \tau_n + \sum_j^n a_{j1}\, \partial \alpha_j / \partial \xi_j + \sum_{p=2} a_{p2}\, \partial^p \alpha_i / \partial \xi_i^p + \sum_j^n f(\alpha_j, \tau_n) = 0, \tag{5}$$

$$a_{i0} = (-1)^{n+1} \mathbf{l}_i A_0 \mathbf{r}_i = (-1)^{n+1} \lambda_i, \quad a_{j1} = -\mathbf{l}_i A_1 \mathbf{r}_j,$$

$$a_{p2} = -\lambda_i^{-1} \mathbf{l}_i B_{0rs} \mathbf{r}_i, \quad f(\alpha_j, \tau_n) = \mathbf{l}_i \mathbf{C}_1(\mathbf{r}_j)\, \alpha_j - \lambda_i^{-1} \mathbf{l}_i K_0\, \partial \mathbf{F}_0 / \partial \xi_j.$$

Структура уравнения (5) показывает, что i-я волна зависит и от тех j-х волн ($j \in n$), для которых выполняется $a_{j1} \neq 0$, $f(\alpha_j, \tau_n) \neq 0$. Уравнение (5) решается при начальном условии

$$\alpha_i(\xi_i, \tau_n)\,|_{\tau_n=0} = \mathbf{l}_i \vec{\Phi}(\xi_i)\, [H(\xi) - H(\xi - \xi_0)].$$

Рассмотрим теперь конкретную задачу — одномерную задачу полупространства, в котором параметры Лямэ и плотность являются функциями от пространственной координаты. Допустим, что справедливо

$$\lambda + 2\mu = (\lambda_0 + 2\mu_0)\,(1 + \varepsilon f_1(X)), \quad \varrho = \varrho_0 (1 + \varepsilon h_1(X)),$$

где индекс «0» обозначает значение указанной величины в определенной точке (напр., при $X = 0$) и ε — малый параметр. Из этих соотношений вытекает также

$$c^2 = c_0^2 (1 + \varepsilon g_1(X)), \quad g_1(X) = f_1(X) - h_1(X).$$

Предположим, что $f_1(X)$ и $h_1(X)$ являются гладкими функциями, они удовлетворяют условиям $f_1(0)=h_1(0)=0$ и обладают производными требуемого порядка. Окончательная система уравнений, описывающая распространение продольных волн в полупространстве, получит форму (1), в которой

$$A=\begin{vmatrix} 0 & c_0^2[1+3(1+m_0)u_2+\varepsilon g_1(X) \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B_{rs}=0,$$

$$K=\begin{vmatrix} -c_0^2 u_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \mathbf{U}=\begin{vmatrix} \partial U_1/\partial t \\ \partial U_1/\partial X \end{vmatrix}, \quad \mathbf{F}=\begin{vmatrix} 1+\varepsilon f_1(X) \\ 0 \end{vmatrix},$$

$$m_0=2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)(\lambda_0+2\mu_0)^{-1}.$$

Здесь ν_i, $i=1, 2, 3$ — модули упругости третьего порядка и диссипация для простоты не учитывается. Система уравнений первого порядка (5) принимает теперь вид

$$\partial\beta_1/\partial\sigma_1+\operatorname{sign}(1+m_0)\beta_1\,\partial\beta_1/\partial\zeta_1-\theta(X)(\partial\beta_1/\partial\zeta_1-\partial\beta_2/\partial\zeta_2)+$$
$$+\Lambda(\beta_1-\beta_2)=0, \tag{6}$$

$$\partial\beta_2/\partial\sigma_2-\operatorname{sign}(1+m_0)\beta_2\,\partial\beta_2/\partial\zeta_2+\theta(X)(\partial\beta_2/\partial\zeta_2-\partial\beta_1/\partial\zeta_1)+$$
$$+\Lambda(\beta_1-\beta_2)=0, \tag{7}$$

$$\beta_i=\alpha_i\alpha_0^{-1}, \quad \mathbf{U}_0=\sum_i\alpha_i\mathbf{r}_i, \quad \zeta_1=(c_0t-X)\tau_c^{-1},$$

$$\zeta_2=(c_0t+X)\tau_c^{-1}, \quad \sigma_1=\varepsilon X\tau_c^{-1}, \quad \sigma_2=-\varepsilon(X-X_0)\tau_c^{-1},$$

$$\theta(X)=\varepsilon c_0(3|1+m_0|\alpha_0)^{-1}g_1(X), \quad \Lambda=\varepsilon\tau_c c_0(3|1+m_0|\alpha_0)^{-1}\,\partial f_1/\partial X,$$

$$\mathbf{r}_1=\begin{vmatrix} 1 \\ -c_0^{-1} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{r}_2=\begin{vmatrix} 1 \\ c_0^{-1} \end{vmatrix}.$$

Здесь τ_c — длина волны, α_0 — максимальная амплитуда. Связанность системы (6), (7) является линейной и обусловливается неоднородностью среды. Пусть имеем

$$\beta_1|_{\sigma_i=0}=\varphi(\zeta_i), \quad \beta_2|_{\sigma_i=0}=0.$$

Тогда в силу связанности уравнений (6), (7) по мере роста σ_1 генерируется и волна β_2.

Для решения задачи в явном виде введем в рассмотрение предпосылки, что $\max\beta_1\gg\max\beta_2$, $\max\partial\beta_1/\partial\zeta_1\gg\max\partial\beta_2/\partial\zeta_2$. Это позволит упростить систему (6), (7):

$$\partial\beta_1/\partial\sigma_1+\operatorname{sign}(1+m_0)\beta_1\,\partial\beta_1/\partial\zeta_1-\theta(X)\,\partial\beta_1/\partial\zeta_1+\Lambda\beta_1=0, \tag{8}$$

$$\partial\beta_2/\partial\sigma_2+\theta(X)\,\partial\beta_2/\partial\zeta_2-\Lambda\beta_2=\theta(X)\,\partial\beta_1/\partial\zeta_1-\Lambda\beta_1. \tag{9}$$

Пусть параметры Лямэ изменяются по линейному закону. Тогда имеем $\Lambda=\mathrm{const}$. Из уравнения (8) определяется β_1 и при слабых нелинейных эффектах $\beta_1=\beta_1(\zeta_1)$. Уравнение (9) допускает запись в характеристиках

$$d\zeta_2/d\sigma_2=\theta(X), \tag{10}$$

$$d\beta_2/d\sigma_2-\Lambda\beta_2=\theta(X)\,\partial\beta_1/\partial\zeta_1-\Lambda\beta_1. \tag{11}$$

Целесообразно в данном случае принять $X_0=0$. Из (10) получим теперь

$$\zeta_2-\zeta_0=\int_{\sigma_2}^{0}\theta(X)\,d\sigma_2,$$

а из (11) вытекает

$$\beta_2=\exp(-\Lambda\sigma_2)\left(\beta_{20}+\int_{\sigma_2}^{0}(\theta(X)\,\partial\beta_1/\partial\zeta_1-\Lambda\beta_1)\exp(\Lambda\sigma_2)\,d\sigma_2\right).$$

Так как $\beta_2=0$ при $\zeta_1<0$, то $\beta_{20}=0$. С другой стороны, $\beta_1\neq0$ в интервале $\{\zeta_1=0,\ \zeta_1=\zeta_{1A}\}$. Так как при коротких импульсах можно предполагать $\Delta\zeta_1\ll\sigma_2$, то справедливо

$$\int_{\sigma_2}^{0}(\theta(X)\,\partial\beta_1/\partial\zeta_1-\Lambda\beta_1)\exp(\Lambda\sigma_2)\,d\sigma_2=$$
$$=\int_{0}^{\zeta_{1A}}(\theta(X)\,\partial\beta_1/\partial\zeta_1-\Lambda\beta_1)\,d\zeta_1\int_{\sigma_2}^{0}\exp(\Lambda\sigma_2)\,d\sigma_2.$$

При симметричном импульсе выполняется

$$\int_{0}^{\zeta_{1A}}\partial\beta_1/\partial\zeta_1=0,$$

откуда

$$\int_{0}^{\zeta_{1A}}\beta_1\,d\zeta_1=\int_{0}^{\zeta_{1A}}\beta_{10}\,d\zeta_1=M_0(\zeta_1),$$

где M_0 — главный момент импульса β_1. С учетом этих упрощений получим наконец

$$\beta_2=M_0(1-\exp(-\Lambda\sigma_2))=M_0(1-\exp(\Lambda\tau_c^{-1}\varepsilon X)). \tag{12}$$

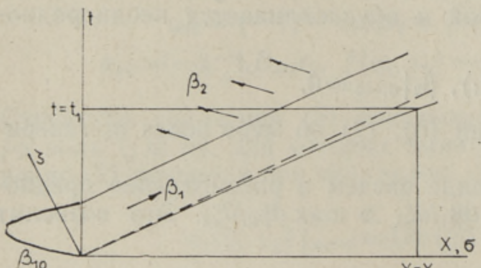

Рис. 1.

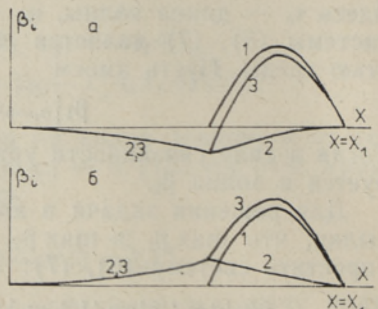

Рис. 2.

На рис. 1 представлена схема процесса на физической плоскости X, t, а на рис. 2 показаны профили волн β_1 (кривая *1*), β_2 (кривая *2*) и $\beta_1+\beta_2$ (кривая *3*) в момент $t=t_1$ согласно решению уравнений (8) и (9). Схема на рис. 2,*а* соответствует случаю $\Lambda>0$, схема на рис. 2,*б* — случаю $\Lambda<0$. Подобная линейная задача, описываемая полной системой (1), была решена в [6] с помощью преобразования Лапласа. Результаты, полученные здесь лучевым методом, полностью совпадают с результатами точного интегрирования [6]. Кроме того, данный подход позволяет учитывать и нелинейность процесса. Как следует из структуры решения (12), β_2 тем больше, чем больше амплитуда волны β_1 (ее главный момент M_0) и чем больше влияние неоднородности (параметр Λ). Необходимо подчеркнуть, что параметр Λ зависит от изменения модуля упругости (параметров Лямэ) и приводит к изменению амплитуды. С другой стороны, изменение скорости учитывается в решении β_i через параметр θ, который обусловливает искривление характеристик на физической плоскости X, t (рис. 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабич В. М., Булдырев В. С., Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач, М., «Наука», 1972.
2. Taniuti, T., Suppl. Progr. Theor. Phys., № 55, 1—35 (1974).
3. Островский Л. А., Пелиновский Е. Н., Прикл. мат. и мех., 38, № 1, 121—124 (1974).
4. Руденко О. В., Солуян С. И., Теоретические основы нелинейной акустики, М., «Наука», 1975.
5. Энгельбрехт Ю. К., Изв. АН СССР, Мех. тверд. тела, № 2, 143—148 (1977).
6. Longcope, D. B., Steele, C. R., J. Appl. Mech., E41, № 4, 1057—1062 (1974).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
1/VI 1979

J. ENGELBRECHT

MITTEHOMOGEENSES KESKKONNAS LEVIVAD SEOSTATUD DEFORMATSIOONILAINED

Modifitseeritud kiirte meetodil on tuletatud seostatud transpordivõrrandite süsteem deformeeruvas keskkonnas levivate ühemõõtmeliste pikilainete kirjeldamiseks. Näitena on vaadeldud juhtu, kus Lamé parameetrite muutus on esitatud lineaarse funktsiooni abil. Sellise juhu tarvis on artiklis toodud lihtne valem, mis kirjeldab vasakule levivat sekundaarset deformatsioonilainet, arvestades ääretingimuse genereeritud paremale levivat primaarset deformatsioonilainet.

J. ENGELBRECHT

COUPLED DEFORMATION WAVES IN NON-HOMOGENEOUS MEDIUM

The transient deformation waves in non-homogeneous medium are described using the modified ray method. A system of transport equations is obtained for one-dimensional coupled longitudinal waves. An example of deformation wave propagation in solid medium is considered. The longitudinal wave β_1 (propagating to the right) is generated by a bounded boundary input. The case when the Lamé parameters change linearly in the space leads to a simple analytic expression (12) for the secondary wave β_2 (propagating to the left). In the expression (12) the following notations are used: M_0 is the moment of the wave β_1, λ is the coefficient that takes into account the change of the Lamé parameters, τ_c is the effective wave-length, and ε is the small parameter. The results of the asymptotic analysis are in good coincidence with the exact solution of the linear problem [6].