EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1978.4.14

УДК 534.2

Н. ВЕКСЛЕР

О СПОСОБЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОТРАЖЕНИЯ АКУСТИЧЕСКОГО ИМПУЛЬСА ОТ СИСТЕМЫ ЖИДКИХ СЛОЕВ ПРИ НОРМАЛЬНОМ ПАДЕНИИ

N. VEKSLER. VEDELATE KIHTIDE SÜSTEEMILE NORMAALI SIHIS LANGEVATE AKUSTILISTE IMPULSSIDE PEEGELDUSTE ARVUTAMISEST

N. VEKSLER. A METHOD FOR THE CALCULATION OF SOUND PULSE REFLECTION FROM A SYSTEM OF LIQUID LAYERS IN CASE OF NORMAL INCIDENCE

(Представлена Н. Алумяэ)

Рассмотрим систему из n плоских жидких слоев, контактирующих с двумя жидкими полупространствами. Положим, что свойства слоев по толщине не изменяются.

Введем следующие обозначения: x — декартова координата, отсчитываемая от границы верхнего полупространства в сторону жидких слоев, t — время; для произвольного слоя k назовем: p_k — акустическое давление, U_k — компонента вектора перемещения, ϱ_k — плотность, c_k — скорость звука, $\zeta_k=\varrho_k c_k$ — акустический импеданс, $h_{k-1}(h_k)$ — расстояние от границы $x=0$ до лицевой (тыльной) поверхности слоя k, $l_k=h_k-h_{k-1}$ — толщина слоя, $t_k=l_k/c_k$ — время пробега акустического импульса по слою. Те же величины с индексом нуль будем относить к падающему импульсу, без индекса — к отраженному импульсу в верхнем полупространстве, с индексом $n+1$ — к нижнему полупространству.

Положим, что время t отсчитывается с момента, когда падающий импульс достиг лицевой поверхности $x=0$. До этого времени все жидкие слои и граничащие с ними жидкие полупространства находились в покое и имели место нулевые начальные условия

$$p_0=p=p_k=0, \quad \partial p_0/\partial t=\partial p/\partial t=\partial p_k/\partial t=0 \quad \text{при} \quad t=0 \tag{1}$$
$$U_0=U=U_k=0, \quad \partial U_0/\partial t=\partial U/\partial t=\partial U_k/\partial t=0 \quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n+1).$$

Пусть из верхнего жидкого полупространства на границу $x=0$ нормально к ней падает плоский акустический импульс давления с произвольным законом изменения интенсивности

$$p_0=f(t-x/c)H(t-x/c), \quad H(t-x/c)=\begin{cases}1, & t-x/c>0,\\ 0, & t-x/c\leqslant 0,\end{cases} \tag{2}$$

где f — заданная функция.

Полагаем, что каждый из слоев и жидкие полупространства описываются одномерными волновыми уравнениями относительно соответствующего акустического давления

$$(\partial^2/\partial x^2 - c^{-2}\partial^2/\partial t^2)\,p = 0, \qquad x \leqslant 0,$$
$$(\partial^2/\partial x^2 - c_k^{-2}\partial^2/\partial t^2)\,p_k = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n), \qquad h_k \geqslant x \geqslant h_{k-1}, \tag{3}$$
$$(\partial^2/\partial x^2 - c_{n+1}^{-2}\partial^2/\partial t^2)\,p_n = 0, \qquad x \geqslant h_n.$$

С учетом нулевых начальных условий (1) представим условия контакта слоев

$$p_0 + p = p_1, \qquad U_0 + U = U_1, \qquad x = 0,$$
$$p_k = p_{k+1}, \quad U_k = U_{k+1} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots, n), \quad x = h_k. \tag{4}$$

Считаем, что в нижнем полупространстве от границы $x = h_n$ распространяется только импульс в положительном направлении координаты x.

Применив к сформулированной задаче по времени t интегральное преобразование Лапласа, выпишем решение изображающей задачи

$$p^L = A \exp(c^{-1}xs), \qquad x \leqslant 0,$$
$$p_k^L = A_k \exp(c_k^{-1}xs) + B_k(-c_k^{-1}xs), \qquad h_k \geqslant x \geqslant h_{k-1}, \tag{5}$$
$$p_{n+1}^L = B_{n+1}\exp(-c_{n+1}^{-1}xs), \qquad x \geqslant h_n.$$

Величины A_k, B_k находятся из алгебраической системы уравнений

$$A + a_{12}A_1 = a_1, \quad a_{22}A_1 + B_1 = a_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{2k+1,2k}A_k + a_{2k+1,2k+1}B_k + a_{2k+1,2k+2}A_{k+1} = 0,$$
$$a_{2k+2,2k+1}B_k + a_{2k+2,2k+2}A_{k+1} + a_{2k+2,2k+3}B_{k+1} = 0, \tag{6}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{2n+1,2n}A_n + a_{2n+1,2n+1}B_n = 0,$$
$$a_{2n+2,2n+1}B_n + a_{2n+2,2n+2}B_{n+1} = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots, n).$$

Коэффициенты этой системы уравнений имеют следующие значения:

$$a_{12} = -u, \; a_{22} = v, \; a_1 = vf^L(s), \; a_2 = wf^L(s), \; a_{2k+1,2k} = -\alpha_{k,k},$$
$$a_{2k+1,2k+1} = \beta_{k,k}v_k, \; a_{2k+1,2k+2} = \alpha_{k,k+1}u_k, \; a_{2k+2,2k+1} = -\beta_{k,k}w_k,$$
$$a_{2k+2,2k+2} = \alpha_{k,k+1}v_k, \; a_{2k+1,2k+3} = \beta_{k,k+1} \; (k = 1, 2, 3, \ldots, n),$$
$$a_{2n+1,2n} = -\alpha_{n,n}, \; a_{2n+1,2n+1} = \beta_{n,n}v_n, \; a_{2n+2,2n+1} = -\beta_{n,n}w_n, \tag{7}$$
$$a_{2n+1,2n+2} = \beta_{n,n+1}, \; \alpha_{k,k+1} = \exp(c_{k+1}^{-1}h_k s), \; \beta_{k,k+1} = \exp(-c_{k+1}^{-1}h_k s),$$
$$u_k = 2\xi_k/(1+\xi_k), \; v_k = (1-\xi_k)/(1+\xi_k), \; w_k = 2/(1+\xi_k),$$
$$u_k w_k + v_k^2 = 1 \; (k = 1, 2, 3, \ldots, n), \; \xi = \zeta/\zeta_1, \; \xi_k = \zeta_k/\zeta_{k+1}.$$

Как известно, в формулах Френеля величины u_k, v_k, w_k называются, соответственно, коэффициентами прохождения из слоя $k+1$ в слой k, отражения от слоя k в слой $k-1$, прохождения из слоя $k-1$ в слой k. Коэффициенты системы уравнений (7) находятся рекуррентно. В случае n жидких слоев приходится решать систему из $2(n+1)$ алгебраических уравнений. В записи (7) матрица коэффициентов при неизвестных этой системы — ленточная и состоит из главной диагонали и двух соседних с ней. Из свободных коэффициентов ненулевых — только два. Такая форма системы уравнений значительно облегчает ее решение.

В качестве примера приведем решение такой системы уравнений для случая трех жидких слоев. Для коэффициента A (5) получим

$$A=f^L(s)\,[v+\delta_1(1-v^2)\,\sigma_1\sigma_2^{-1}],\quad \sigma_1=v_1+\delta_2v_2+\delta_3v_1v_2v_3+\delta_2\delta_3v_3,\tag{8}$$

$$\sigma_2=1+\varepsilon,\quad \varepsilon=\delta_1v\sigma_1+\delta_2v_1v_2+\delta_3v_2v_3+\delta_2\delta_3v_1v_3.\quad \delta_k=\exp(-2st_k)\quad (k=1,\,2,\,3).$$

Характерной особенностью последней формулы является то обстоятельство, что в нее, помимо $f^L(s)$, входят коэффициенты отражения v_k и изображения смещений по времени δ_k.

Поскольку $|\varepsilon|<1$, используем разложение $\sigma_2^{-1}=\sum\limits_{m=0}^{\infty}(-\varepsilon)^m$ и представим величину A в виде ряда

$$A=f^L(s)\,[v+\delta_1(1-v^2)\,\sigma_1\sum_{m=0}^{\infty}(-\varepsilon)^m].\tag{9}$$

Проведя в последней формуле перемножение и сгруппировав члены с одинаковыми степенями произведений δ_k, после умножения на $\exp(c^{-1}xs)$ (5) и использования теоремы смещения найдем оригинал акустического давления p в отраженном от лицевой поверхности импульсе. В качестве примера приведем обращение одного характерного слагаемого формулы (9), стоящего при произведении $\delta_1\delta_2\delta_3$:

$$y^L=f^L\exp(c^{-1}xs)\,\delta_1\delta_2\delta_3(1-v^2)\,(1-v_1^2-v_2^2+v_1^2v_2^2)\,v_3,\tag{10}$$

которое с помощью соотношения $1-v_k{}^2=u_kw_k$ (7) представим в виде

$$y^L=F\exp(c^{-1}xs)\,\delta_1\delta_2\delta_3f^L(s),\qquad F=uwu_1w_1u_2w_2v_3.\tag{11}$$

Оригинал этого слагаемого запишем в форме

$$y=Ff(\tau)\,H(\tau),\qquad \tau=t+c^{-1}x-2\,(t_1+t_2+t_3).\tag{12}$$

Такое слагаемое учитывает вклад в отраженный импульс в верхнем жидком полупространстве импульса, прошедшего туда и обратно все три жидких слоя. Это видно из его запаздывания на время $2(t_1+t_2+t_3)$ относительно импульса, сразу отразившегося от границы $x=0$, и интенсивности F, представляющей собой произведение коэффициентов прохождения u_k из слоя $k+1$ в слой k, коэффициентов прохождения из слоя k в слой $k+1$ и коэффициента отражения v_3 от нижнего жидкого полупространства к третьему жидкому слою.

Отметим, что импульсы, совершившие одинаковое число переотражений (в различной временной последовательности), согласно формуле (9) суммируются автоматически.

Полученные результаты могут найти применение при разработке автоматических акустических уровнемеров, используемых в различных технологических химических процессах и для контроля заполнения резервуаров-хранилищ жидкостей.

Как известно, при нормальном падении акустического импульса на систему упругих слоев (либо на систему упругих слоев, чередующихся с жидкими) поперечных волн в последних не возникает, так что в этом случае они ведут себя как жидкие. Поэтому полученные результаты могут служить основой для определения толщины и импеданса отдельного упругого слоя, расположенного в пакете слоев.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
14/IV 1978