EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1978.4.12

УДК 519.45

Х. ЫЙГЛАНЕ

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРУППЫ КЛИФФОРДА НА МНОЖЕСТВЕ ОДНОМЕРНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ САМОЙ ГРУППЫ

H. ÕIGLANE. CLIFFORDI RÜHMA ESITAMINE TEMA OMA ÜHEDIMENSIOONILISTE ESITUSTE HULGAL

H. OIGLANE. REPRESENTATION OF THE CLIFFORD GROUP ON THE SET OF ONE-DIMENSIONAL REPRESENTATIONS OF THE SAME GROUP

(*Представлена Х. Кересом*)

Группа Клиффорда G определяется генераторами e_k, $k=1, 2, \ldots, n$, причем

$$e_k^2=1, \quad e_k e_l = -e_l e_k, \quad k \neq l. \tag{1}$$

Элементами группы $g \in G$ являются 2^{n+1} произведений

$$(\pm 1, \pm e_k, \pm e_k e_l, \ldots, \pm e_1 e_2 \ldots e_n). \tag{2}$$

При четном $n=2m$ $(m=1, 2, \ldots)$ группа содержит 2^n+1 классов сопряженных элементов. Из соотношения

$$2^{n+1}=(2^{n/2})^2+\sum_{k=1}^{2^n} 1_k^2, \quad 1_k=1, \tag{3}$$

следует, что в этом случае группа Клиффорда имеет одно $2^{n/2}$-мерное представление и 2^n одномерных представлений.

При нечетном $n=2m+1$ группа содержит $2^{2n}+2$ классов сопряженных элементов. Из соотношения

$$2^{n+1}=2(2^{(n-1)/2})^2+\sum_{k=1}^{2^n} 1_k^2, \quad 1_k=1, \tag{4}$$

следует, что в этом случае группа имеет два $2^{(n-1)/2}$-мерных представления и 2^n одномерных представлений.

В любом случае у группы Клиффорда порядка 2^{n+1} есть 2^n одномерных представлений $\chi^p(g)$, $p=1, 2, \ldots, 2^n$, причем

$$\chi^p(-g)=\chi^p(g).$$

Неприводимые тензорные операторы T^p одномерных представлений $\chi^p(g)$ определяются из соотношения [1]

$$gT^p g^{-1}=\chi^p(g)\,T^p \tag{5}$$

с точностью до числового множителя; они являются матрицами $2^{n/2}$-мерного (или соответственно $2^{(n-1)/2}$-мерного) представления. Соотношение

(5) устанавливает соответствие $\pm g \leftrightarrow p$, и одномерные представления можем пронумеровать с помощью различных элементов группы g' (элементы g' и $-g'$ считаем эквивалентными). Таким образом, имеем 2^n одномерных представлений группы Клиффорда $\chi^{g'}(g)$. Можно показать, что

$$\chi^{g'}(g) = \chi^{g}(g').$$

На множестве одномерных представлений χ^g определяем кронекеровское произведение $\chi^g \chi^{g'} = \chi^{gg'}$ и получаем тем самым гомоморфное представление группы Клиффорда на множестве одномерных представлений самой группы $\pm g \to \chi^g$. Это представление нового типа, которое в литературе до сих пор не рассматривалось.

В конкретном случае $n = 2$ группа содержит 8 элементов (± 1, $\pm e_1$, $\pm e_2$, $\pm e_1 e_2$) и 4 одномерных представления:

	χ^1	χ^{e_1}	χ^{e_2}	$\chi^{e_1 e_2}$
± 1	1	1	1	1
$\pm e_1$	1	1	-1	-1
$\pm e_2$	1	-1	1	-1
$\pm e_1 e_2$	1	-1	-1	1

При $n = 4$ имеем группу Дирака, у которой одно 4-мерное представление и 16 одномерных представлений.

Отметим еще, что одномерные представления группы Клиффорда образуют абелеву группу. Мы получили гомоморфное отображение группы Клиффорда на некоторую абелеву группу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вигнер Е. Теория групп. М., 1961.

Институт физики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
3/III 1978