EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 27. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1978, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 27
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1978, № 4

УДК 62 — 50

Эбу ТАММ

НЕРАВЕНСТВА ТИПА ЧЕБЫШЕВА ДЛЯ РЕШЕНИЯ E-МОДЕЛЕЙ НЕЛИНЕЙНОГО СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

EBU TAMM. TŠEBOŠEVI TÜÜPI VÕRRATUSED MITTELINEAARSE STOHHASTILISE PLANEERIMISE E-MUDELITELE

EBU TAMM. TCHEBYCHEFF INEQUALITIES FOR E-MODELS OF NONLINEAR STOCHASTIC PROGRAMMING

(Представлена Н. Алумяэ)

Рассмотрим две задачи стохастического программирования — задачу без ограничений

$$\min \{Ef(x,\eta) \mid x \in R^n\} \tag{1}$$

и задачу с ограничениями типа равенств

$$\min \{Ef(x,\eta) \mid Eg(x,\eta)=0\}, \tag{2}$$

где R^n — n-мерное евклидово пространство; $\eta \in R^r$ — случайный вектор; $f(x,\eta)$ — функция из $R^n \times R^r$ в R^1; $g(x,\eta)=(g_1(x,\eta),\ldots$ $\ldots,g_m(x,\eta))$ — функция из $R^n \times R^r$ в R^m; E — математическое ожидание.

Известно, что во многих случаях задачи (1) и (2) как детерминированные задачи нелинейного программирования или не поддаются решению (распределение вектора η неизвестно), или их решение сопряжено с трудностями из-за повторных вычислений r-кратных интегралов и их производных. Один из способов преодоления этих трудностей — замена задач (1) и (2) задачами

$$\min\left\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(x,\eta_i) \mid x \in R^n\right\} \tag{3}$$

и

$$\min\left\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} f(x,\eta_i) \;\Big|\; \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} g(x,\eta_i)=0\right\} \tag{4}$$

соответственно, где $\eta_1,\ldots,\eta_k$ — независимые реализации случайного вектора η.

В [1, 2] была изучена сходимость случайных величин $E[f(x_k,\eta) \mid \eta_1,\ldots,\eta_k]$ к величине $\min\limits_{x\in X} Ef(x,\eta)$, где X — либо ограниченное замкнутое множество пространства R^n или все пространство R^n, либо компактное метрическое пространство. В [1] исследовалась также сходимость последовательности x_k, $k=1,2,\ldots$, определяемой из условий $\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} f(x_k,\eta_i)=\min\limits_{x\in X}\frac{1}{k}\sum\limits_{i=1}^{k} f(x,\eta_i)$.

В данной работе сформулируем условия, при которых задачи (3) и (4) имеют решения с некоторой положительной вероятностью, и оценим вероятностные расстояния решений задач (3) и (4) от решений задач (1) и (2). Полученные результаты являются прямыми следствиями из теорем 1 и 3 работы [3].

Предположим:

1. Существует локальное решение x^* задачи (1).

2. Линейный оператор $Ef''_{xx}(x^*, \eta)$ положительно определен, т. е. существует $M_1 > 0$ такое, что $u^\tau Ef''_{xx}(x^*, \eta) u \geqslant M_1 \|u\|^2$ для любого $u \in R^n$.

3. Функция $f(x, \eta)$ дважды непрерывно дифференцируема по x и $\|f''_{xx}(x^1, \eta) - f''_{xx}(x^2, \eta)\| \leqslant K_1(\eta) \|x^1 - x^2\|$ для почти всех η и любых $x^1, x^2 \in R^n$.

4. $EK_1(\eta)$ и $\sigma^2[K_1(\eta)]$ конечны.

5. $[Ef(x, \eta)]' = Ef'_x(x, \eta)$ и $[Ef(x, \eta)]'' = Ef''_{xx}(x, \eta)$ в точке $x = x^*$.

6. $E\|f''_{xx}(x^*, \eta) - Ef''_{xx}(x^*, \eta)\|^2$ и $\sigma^2[f'_{x_i}(x^*, \eta)]$, $i = 1, 2, \ldots, n$, конечны.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия 1—6. Тогда для любых постоянных δ_1, δ_2 таких, что $0 < \delta_1 < M_1$, $\delta_2 > 0$, и достаточно больших k существует измеримое множество $\mathfrak{V}(k, \delta_1, \delta_2) \subseteq \underbrace{R^r \times \ldots \times R^r}_{k}$ такое, что*

1) *если $(\eta_1, \ldots, \eta_k) \in \mathfrak{V}(k, \delta_1, \delta_2)$, то задача (3) имеет локальное решение $x_k^*(\eta_1, \ldots, \eta_k)$;*

2) $P\{\mathfrak{V}(k, \delta_1, \delta_2)\} \geqslant p(k, \delta_1, \delta_2)$;

3) $P\{\|x_k^*(\eta_1, \ldots, \eta_k) - x^*\| < \varepsilon$ *и* $(\eta_1, \ldots, \eta_k) \in \mathfrak{V}(k, \delta_1, \delta_2)\} \geqslant$

$$\geqslant p(k, \delta_1, \delta_2) - \frac{1}{k\varepsilon^2(M_1 - \delta_1)^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2[f'_{x_i}(x^*, \eta)],$$

где

$$p(k, \delta_1, \delta_2) = 1 - \frac{1}{k}\left[\frac{1}{\delta_1^2} E\|f''_{xx}(x^*, \eta) - Ef''_{xx}(x^*, \eta)\|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{16[EK_1(\eta) + \delta_2]^2}{(M_1 - \delta_1)^4} \sum_{i=1}^{n} \sigma^2[f'_{x_i}(x^*, \eta)] + \frac{1}{\delta_2^2} \sigma^2[K(\eta)]\right] -$$

положительное число.

Следствие 1. *Если $k \to \infty$, то $P\{\mathfrak{V}(k, \delta_1, \delta_2)\} \to 1$ и $P\{\|x_k^*(\eta_1, \ldots, \eta_k) - x^*\| < \varepsilon$ и $(\eta_1, \ldots, \eta_k) \in \mathfrak{V}(k, \delta_1, \delta_2)\} \to 1$.*

Пусть, далее, x^* — локальное решение задачи (2). Обозначим лагранжиан задачи (2) через $L(x, \lambda)$, т. е. $L(x, \lambda) = Ef(x, \eta) + \lambda^\tau Eg(x, \eta)$, $\lambda \in R^m$. Дополним условия 3—6 условиями:

7. Существует точка локального минимума x^* задачи (2).

8. Функция $g(x, \eta)$ дважды непрерывно дифференцируема по x, причем $\|g''_{xx}(x^1, \eta) - g''_{xx}(x^2, \eta)\| \leqslant K_2(\eta)$, $\|g''_{xx}(x, \eta)\| \leqslant R(\eta)$ для почти всех $\eta \in R^r$ и любых $x, x^1, x^2 \in R^n$.

9. $EK_2(\eta)$, $ER(\eta)$, $\sigma^2[K_2(\eta)]$ и $\sigma^2[R(\eta)]$ конечны.

10. $[Eg(x, \eta)]' = Eg'_x(x, \eta)$ и $[Eg(x, \eta)]'' = Eg''_{xx}(x, \eta)$ в точке $x = x^*$.

11. Для некоторого $\varrho > 0$ верно $\|[Eg'_x(x^*, \eta)]^\tau v\| \geqslant \varrho \|v\|$ при любом $v \in R^m$.

Условия 7 и 11 означают, что существует единственный вектор $\lambda^* \in R^m$ такой, что $L'_x(x^*, \lambda^*) = 0$.

12. Для некоторого $M_2>0$ верно $u^{\mathrm{T}}L''_{xx}(x^*,\lambda^*)u=u^{\mathrm{T}}Ef''_{xx}(x^*,\eta)u+$ $+u^{\mathrm{T}}\sum_{j=1}^{m}\lambda_j^*Eg''_{jxx}(x^*,\eta)u\geqslant M_2\|u\|^2$ при любом $u\in R^n$.

13. $E\|g'_x(x^*,\eta)-Eg'_x(x^*,\eta)\|^2$, $E\|g''_{xx}(x^*,\eta)-Eg''_{xx}(x^*,\eta)\|^2$ и $\sigma^2[g_j(x^*,\eta)]$, $j=1,2,\ldots,m$, конечны.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 3—13. *Тогда для любых постоянных* $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_5$ *таких, что* $0<\gamma_1<M_2$, $0<\gamma_2<\varrho$, $\gamma_3>0$, $\gamma_4>0$, $\gamma_5>0$, *и достаточно больших* k *существует множество* $\mathfrak{W}(k,\gamma_1,\ldots,\gamma_5)\subseteq\underbrace{R^r\times\ldots\times R^r}_{k}$ *такое, что*

1) *если* $(\eta_1,\ldots,\eta_k)\in\mathfrak{W}(k,\gamma_1,\ldots,\gamma_5)$, *то задача* (4) *имеет решение* $x_k^*(\eta_1,\ldots,\eta_k)$;

2) $P\{\mathfrak{W}(k,\gamma_1,\ldots,\gamma_5)\}\geqslant q(k,\gamma_1,\ldots,\gamma_5)$;

3) $P\{\|x_k^*(\eta_1,\ldots,\eta_k)-x^*\|<\varepsilon$ *и* $(\eta_1,\ldots,\eta_k)\in\mathfrak{W}(k,\gamma_1,\ldots,\gamma_5)\}\geqslant$ $\geqslant q(k,\gamma_1,\ldots,\gamma_5)-\dfrac{9(D_3+\|\lambda^*\|D_2+D_4)}{k\varepsilon^2}$ *для любого* $\varepsilon>0$, *где*

$$q(k,\gamma_1,\ldots,\gamma_5)=1-\frac{1}{k}\Bigg[\frac{D_1}{\gamma_1^2}+\frac{D_2}{\gamma_2^2}+\frac{\sigma^2[K_1(\eta)]}{\gamma_3^2}+\frac{\sigma^2[K_2(\eta)]}{\gamma_4^2}+$$

$$+\frac{\sigma^2[R(\eta)]}{\gamma_5^2}+144c_1^4c_2^2(D_3+\|\lambda^*\|D_2+D_4)\Bigg]-$$

положительное число и

$$D_1=\left(\sqrt{E\|f''_{xx}(x^*,\eta)-Ef''_{xx}(x^*,\eta)\|^2}+\|\lambda^*\|\sqrt{E\|g''_{xx}(x^*,\eta)-Eg''_{xx}(x^*,\eta)\|^2}\right)^2,$$

$$D_2=E\|g'_x(x^*,\eta)-Eg'_x(x^*,\eta)\|^2,$$

$$D_3=\sum_{i=1}^{n}\sigma^2[f'_{x_i}(x^*,\eta)],$$

$$D_4=\sum_{j=1}^{m}\sigma^2[g_j(x^*,\eta)],$$

$$c_1=\alpha_1+\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3+2\alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_3,$$

$$\alpha_1=1/(M_2-\gamma_1),\ \alpha_2=\|Eg'_x(x^*,\eta)\|+\gamma_2,\ \alpha_3=\frac{\|L''_{xx}(x^*,\lambda^*)\|+\gamma_1}{(\varrho-\gamma_2)^2},$$

$$c_2=EK_1(\eta)+\|\lambda^*\|EK_2(\eta)+3ER(\eta)+\gamma_3+\|\lambda^*\|\gamma_4+3\gamma_5.$$

Следствие 2. *Если* $k\to\infty$, *то* $P\{\mathfrak{W}(k,\gamma_1,\ldots,\gamma_5)\}\to 1$ *и* $P\{\|x_k^*(\eta_1,\ldots,\eta_k)-x^*\|<\varepsilon$ *и* $(\eta_1,\ldots,\eta_k)\in\mathfrak{W}(k,\gamma_1,\ldots,\gamma_5)\}\to 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сысоев Л. П. Статистические методы обучения, основанные на идентификации учителя. — Автоматика и телемеханика, 1970, № 11, с. 19—28.
2. Фетисов В. Н. Неравенство к методу Монте-Карло. — Теория вероятности и ее применения, 1974, т. 19, № 1, с. 224—226.
3. Tamm, E. Inequalities for the solution of nonlinear programming problems depending on a random parameter. — Math. Operat. u. Statist., (в печати).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
22/XII 1977