

<https://doi.org/10.3176/phys.math.1978.4.05>

УДК 532.517.4

А. ЭПШТЕЙН

**О РАСЧЕТЕ ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЙ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ
ПЕРЕНОСА ЗАВИХРЕННОСТИ**

(Представлена И. Эпиком)

В настоящее время при расчете турбулентных течений для замыкания уравнений осредненного движения широко используются методы, основанные на решении уравнений баланса турбулентной энергии, турбулентных касательных напряжений, турбулентной вязкости и т. д. [1, 2]. Эти методы, ведущие свое начало от работ А. Н. Колмогорова [3], Л. Прандтля [4] и И. Ротта [5], существенно расширили возможности расчета различных турбулентных течений по сравнению с ранними феноменологическими моделями Буссинеска, Прандтля, Тейлора и др. [6, 7]. Вместе с тем для этих методов характерны значительная доля формализма и отсутствие физической наглядности, присущей, например, теориям пути смешения. Настоящая работа представляет собой попытку синтеза некоторых результатов, вытекающих из предложенной Дж. Тейлором [8] обобщенной теории переноса завихренности, и современных концепций баланса турбулентной энергии или турбулентной вязкости.

Согласно обобщенной теории переноса завихренности, в стационарном турбулентном течении несжимаемой жидкости при условии пренебрежимо малого влияния молекулярной вязкости пульсация завихренности может быть выражена следующим образом [9]:

$$\vec{\omega} = \nabla \times \vec{q} = \nabla \times (\vec{l} \times \vec{\Omega}), \quad (1)$$

где $\vec{\Omega}$ — осредненная завихренность, \vec{q} — пульсация скорости, \vec{l} — линейный масштаб турбулентности, который можно интерпретировать здесь как меру отклонения элемента жидкости от некоторого среднего положения.

Для двумерного (в осредненном смысле) течения в плоскости xy , имеющего осредненную скорость $\vec{Q}\{U, V, 0\}$, $\vec{\Omega} = \vec{\Omega}\{0, 0, Z = \frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\}$,

но $\vec{\omega} = \vec{\omega}\{\xi, \eta, \zeta\}$, $\vec{q} = \vec{q}\{u, v, w\}$ и $\vec{l} = \vec{l}\{l_x, l_y, l_z\}$.

Учитывая уравнение неразрывности для пульсации скорости

$$\nabla \cdot \vec{q} = 0, \quad (2)$$

получим из (1)

$$\nabla^2 \vec{q} = -(\nabla \times \vec{\omega}). \quad (3)$$

Используя известные свойства линейных дифференциальных уравнений, запишем решение неоднородного уравнения (3) в виде

$$\vec{q} = \vec{q}_0 + \vec{q}_1. \quad (4)$$

Здесь $\vec{q}_0 \{u_0, v_0, \omega_0\}$ есть решение соответствующего однородного уравнения

$$\nabla^2 \vec{q} = 0 \quad (5)$$

при граничных условиях, представляющих собой разность между фактическими значениями \vec{q} на границах области определения и величинами, связанными с неоднородностями; $\vec{q}_1 \{u_1, v_1, \omega_1\}$ есть частное решение уравнения (3), удовлетворяющее граничным условиям, связанным с неоднородностями.

По своему физическому смыслу \vec{q}_0 следует рассматривать как фактическую мгновенную скорость турбулентного перемещения элемента жидкости в направлении \vec{l} относительно осредненного движения. Так как эта скорость не влияет на пульсацию завихренности, справедливо уравнение

$$\nabla \times \vec{q}_0 = 0. \quad (6)$$

Составляющая пульсации скорости \vec{q}_0 является как бы первичной и предполагается зависящей от предыстории течения, условий на его границах, а также от локального вклада потенциальной энергии течения.

Отметим, что область определения \vec{q}_0 как гармонической функции, строго говоря, включает в себя только зону развитого турбулентного течения, для которого справедлива исходная зависимость (1).

Составляющая \vec{q}_1 , отражающая результат турбулентного перемещения элемента жидкости из одной точки в другую с иными значениями осредненных параметров течения и линейного масштаба турбулентности, зависит только от локальных характеристик течения.

Для двумерного пограничного слоя ($U \gg V$, $W \equiv 0$ и $\partial/\partial y \gg \partial/\partial x$, $\partial/\partial z \equiv 0$ для осредненных параметров) уравнение (3) в проекциях на координатные оси принимает вид

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= -l_y \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} \right) - \left[\left(\frac{\partial l_y}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial l_z}{\partial z} \right) \right] \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right), \\ \nabla^2 v &= \left(\frac{\partial l_y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right), \quad \nabla^2 \omega = - \left(\frac{\partial l_x}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Предположим, что (а) члены, содержащие вторые производные от компонент масштаба турбулентности, пренебрежимо малы. Это допущение оправдывается существенным упрощением получающихся результатов. Тогда, согласно (4), а также с учетом аппроксимации пограничного слоя, приближенные решения уравнений (7) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned}
 u &= u_0 - l_y \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial l_x}{\partial x} \right) U, \\
 v &= v_0 + \left(\frac{\partial l_y}{\partial x} \right) U, \quad w = w_0 - \left(\frac{\partial l_x}{\partial z} \right) U.
 \end{aligned}
 \tag{8}$$

Здесь и далее используется система координат, жестко связанная с источником течения или с неподвижными поверхностями.

Компоненты \vec{l} должны удовлетворять соответствующей форме уравнения неразрывности [9]:

$$\nabla \cdot \vec{l} = 0.
 \tag{9}$$

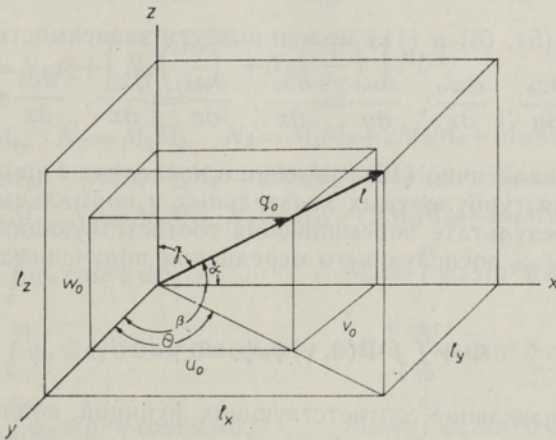
Кроме того, из условия коллинеарности векторов \vec{l} и \vec{q}_0 и равенства (6) следует, что

$$\nabla \times \vec{l} = 0.
 \tag{10}$$

Наконец, по определению, компоненты векторов \vec{l} и \vec{q}_0 равны:

$$\begin{aligned}
 l_x &= l \cos \alpha, \quad l_y = l \cos \beta, \quad l_z = l \cos \gamma, \\
 u_0 &= q_0 \cos \alpha, \quad v_0 = q_0 \cos \beta, \quad w_0 = q_0 \cos \gamma,
 \end{aligned}
 \tag{11}$$

причем $\cos \alpha = \sin \theta \sin \gamma$, $\cos \beta = \cos \theta \sin \gamma$ (рисунок).



С помощью (9) — (11) выводятся следующие выражения для отдельных компонент градиента линейного масштаба турбулентности:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l_x}{\partial x} &= \left(\frac{\partial l}{\partial x} \right) \sin^3 \theta \sin \gamma + \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \sin \gamma + \\
 &+ l \cos \theta \sin \gamma (1 + \sin^2 \theta \sin^2 \gamma) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + l \sin \theta \sin \gamma (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \gamma) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \\
 \frac{\partial l_y}{\partial y} &= \left(\frac{\partial l}{\partial x} \right) \sin \theta \cos^2 \theta \sin \gamma + \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right) \cos^3 \theta \sin \gamma -
 \end{aligned}$$

$$-l \cos \theta \sin \gamma (1 - \cos^2 \theta \sin^2 \gamma) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - l \sin \theta \sin \gamma (1 + \cos^2 \theta \sin^2 \gamma) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial l_z}{\partial z} = - \left(\frac{\partial l}{\partial x} \right) \sin \theta \sin \gamma - \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right) \cos \theta \sin \gamma -$$

$$- l \cos \theta \sin^3 \gamma \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + l \sin \theta \sin^3 \gamma \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right), \quad (12)$$

$$\frac{\partial l_x}{\partial y} = \frac{\partial l_y}{\partial x} = \left(\frac{\partial l}{\partial x} \right) \sin^2 \theta \cos \theta \sin \gamma + \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right) \sin \theta \cos^2 \theta \sin \gamma -$$

$$- l \sin \theta \sin \gamma (1 - \cos^2 \theta \sin^2 \gamma) \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + l \cos \theta \sin \gamma (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \gamma) \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial l_x}{\partial z} = \frac{\partial l_z}{\partial x} = \left(\frac{\partial l}{\partial x} \right) (\cos^2 \theta \sin \gamma \operatorname{tg} \gamma + \cos \gamma) - \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right) \sin \theta \cos \theta \sin \gamma \operatorname{tg} \gamma -$$

$$- l \sin \theta \cos \theta \sin^3 \gamma \operatorname{tg} \gamma \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) - l (1 - \sin^2 \theta \sin^2 \gamma) \sin \gamma \operatorname{tg} \gamma \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial l_y}{\partial z} = \frac{\partial l_z}{\partial y} = - \left(\frac{\partial l}{\partial x} \right) \sin \theta \cos \theta \sin \gamma \operatorname{tg} \gamma + \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right) (\sin^2 \theta \sin \gamma \operatorname{tg} \gamma + \cos \gamma) +$$

$$+ l (1 - \cos^2 \theta \sin^2 \gamma) \sin \gamma \operatorname{tg} \gamma \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) + l \sin \theta \cos \theta \sin^3 \gamma \operatorname{tg} \gamma \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right).$$

Здесь $\theta, \gamma, \frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$ — случайные величины, причем средние значения

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right) = 0.$$

С помощью (5), (6) и (11) можно вывести зависимости для

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial y}, \frac{\partial \omega_0}{\partial z}, \frac{\partial u_0}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial z} = \frac{\partial \omega_0}{\partial x}, \frac{\partial v_0}{\partial z} = \frac{\partial \omega_0}{\partial y}$$

и записать их аналогично (12), заменив в последних l на q_0 .

Формулы для турбулентных касательных и нормальных напряжений получаются в результате перемножения соответствующих членов в (8), учета (11), (12) и последующего осреднения полученных произведений по формуле

$$\bar{\Phi} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \Phi(\theta, \gamma) \psi_{\theta} \psi_{\gamma} \sin \gamma d\theta d\gamma. \quad (13)$$

Здесь Φ — произведение соответствующих функций, подлежащее осреднению; $\bar{\Phi}$ — среднее значение (математическое ожидание) Φ ; $\psi_{\theta}, \psi_{\gamma}$ — плотности распределения вероятности для θ и γ , т. е.

$$\int_0^{2\pi} \psi_{\theta} d\theta = 1, \quad \int_0^{\pi} \psi_{\gamma} \sin \gamma d\gamma = \int_{-1}^1 \psi_{\cos \gamma} d(\cos \gamma) = 1.$$

Примем для простоты также $\bar{q}_0 = q_0$ и $\bar{l} = l$, т. е. мгновенные значения u_0, v_0, ω_0 и l_x, l_y, l_z будем считать обусловленными только текущим направлением векторов \vec{q}_0 и \vec{l} .

До того как записать соответствующие формулы в окончательном виде, рассмотрим возможности их упрощения.

Отметим, прежде всего, что вследствие независимости друг от друга

градиентов $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ и $\frac{\partial \theta}{\partial y}$, которые могут принимать положительные и отрицательные значения, их корреляция $\overline{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)} = 0$.

Предположим далее, что (б) в любом пограничном слое $l/a = \text{const}$ ($a(x)$ — условная ширина пограничного слоя). Это допущение, широко используемое для свободных пограничных слоев, логично распространить и на течения с непроницаемыми границами (твердая стенка, свободная поверхность). Действительно, наличие непроницаемой поверхности, препятствуя турбулентным пульсациям в направлении y (так, что v_0 и l_y обращаются в нуль на поверхности), влияния на пульсации скорости в направлениях x и z не оказывает (по крайней мере за пределами вязкого слоя у твердой стенки). Другими словами, наличие непроницаемой поверхности влияет на масштаб турбулентности \vec{l} как на векторную величину, но не на модуль этого вектора.

Таким образом, $\partial l / \partial y = 0$. Поскольку в пограничном слое, как правило, $\partial l / \partial x$ малая величина, можно пренебречь и ею.

С учетом сказанного выше получим:

$$\begin{aligned} \overline{uv} &= -N_1 q_0 l \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right), & \overline{uw} &= \overline{vw} = 0, \\ \overline{u^2} &= N_2 q_0^2 + N_4 l^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left[N_3 \overline{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2} + N_4 \overline{\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2} \right] l^2 U^2, \\ \overline{v^2} &= N_1 q_0^2 + \left[N_5 \overline{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2} + N_6 \overline{\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2} \right] l^2 U^2, \\ \overline{w^2} &= N_7 q_0^2 + \left[N_8 \overline{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2} + N_9 \overline{\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2} \right] l^2 U^2, \end{aligned} \tag{14}$$

где $N_1 = M_1 M_8$, $N_2 = M_2 M_8$, $N_3 = M_1 M_8 + 2M_3 M_9 + M_4 M_{10}$, $N_4 = M_2 M_8 - 2M_6 M_9 + M_7 M_{10}$, $N_5 = M_2 M_8 - 2M_3 M_9 + M_5 M_{10}$, $N_6 = M_1 M_8 - 2M_3 M_9 + M_4 M_{10}$, $N_7 = M_{14}$, $N_8 = M_3 M_{13}$, $N_9 = M_{11} - 2M_2 M_{12} + M_6 M_{13}$;

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^{2\pi} \psi_\theta \cos^2 \theta \, d\theta, & M_2 &= \int_0^{2\pi} \psi_\theta \sin^2 \theta \, d\theta, \\ M_3 &= \int_0^{2\pi} \psi_\theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta, & M_4 &= \int_0^{2\pi} \psi_\theta \sin^4 \theta \cos^2 \theta \, d\theta, \\ M_5 &= \int_0^{2\pi} \psi_\theta \sin^2 \theta \cos^4 \theta \, d\theta, & M_6 &= \int_0^{2\pi} \psi_\theta \sin^4 \theta \, d\theta, \\ M_7 &= \int_0^{2\pi} \psi_\theta \sin^6 \theta \, d\theta, & M_8 &= \int_0^\pi \psi_\gamma \sin^3 \gamma \, d\gamma, \\ M_9 &= \int_0^\pi \psi_\gamma \sin^5 \gamma \, d\gamma, & M_{10} &= \int_0^\pi \psi_\gamma \sin^7 \gamma \, d\gamma, \\ M_{11} &= \int_0^\pi \psi_\gamma \sin^3 \gamma \, \text{tg}^2 \gamma \, d\gamma, & M_{12} &= \int_0^\pi \psi_\gamma \sin^5 \gamma \, \text{tg}^2 \gamma \, d\gamma, \\ M_{13} &= \int_0^\pi \psi_\gamma \sin^7 \gamma \, \text{tg}^2 \gamma \, d\gamma, & M_{14} &= \int_0^\pi \psi_\gamma \sin \gamma \cos^2 \gamma \, d\gamma. \end{aligned}$$

В случае равной вероятности турбулентных пульсаций в любом направлении $\psi_\theta = \frac{1}{2\pi} = \text{const}$, $\psi_\gamma = \frac{1}{2} = \text{const}$ и $M_1 = M_2 = \frac{1}{2}$, $M_3 = \frac{1}{8}$, $M_4 = M_5 = \frac{1}{16}$, $M_6 = \frac{3}{8}$, $M_7 = \frac{5}{16}$, $M_8 = \frac{2}{3}$, $M_9 = \frac{8}{15}$, $M_{10} = \frac{16}{35}$, $M_{11} = \frac{8}{3}$, $M_{12} = \frac{16}{5}$, $M_{13} = \frac{128}{35}$, $M_{14} = \frac{1}{3}$, следовательно, $N_1 = N_2 = N_7 = \frac{1}{3}$.

Предположение о равной вероятности вполне естественно в случае свободных пограничных слоев и вообще вдали от непроницаемых границ. Вблизи же непроницаемой поверхности, хотя $\psi_\gamma = \text{const}$, распределение ψ_θ обычно таково, что по мере приближения к этой поверхности вероятность пульсаций в направлении y , т. е. значений θ , стремящихся к 0 или π , уменьшается. На самой поверхности, очевидно, $\psi_\theta = \delta(\theta)$ (δ — дельта-функция), $M_1 = M_3 = M_4 = M_5 = 0$, $M_2 = M_6 = M_7 = 1$ и, следовательно, $N_1 = 0$, $N_2 = \frac{2}{3}$, $N_7 = \frac{1}{3}$.

Как следует из формулы для касательных напряжений в (14), турбулентная вязкость, определяемая как $\varepsilon = -\overline{uv} / \frac{\partial U}{\partial y}$, равна

$$\varepsilon = N_1 q_0 l. \quad (15)$$

По своей структуре формула (15) отличается от соответствующей зависимости, постулированной А. Н. Колмогоровым [3] и Л. Прандтлем [4], лишь тем, что ε пропорциональна квадратному корню от кинетической энергии первичной составляющей $q_0 = (\overline{q_0^2})^{1/2}$, а не полной кинетической энергии турбулентности. Кроме того, в общем случае коэффициент $N_1 = N_1 \left(\frac{y}{a} \right)$, а не является константой.

Сопоставление формул для нормальных напряжений в (14) с опытными данными [10] по плоскому течению в канале показывает, что эти формулы качественно правильно отражают действительные распределения $\overline{u^2}$, $\overline{v^2}$ и $\overline{w^2}$ поперек течения, если считать, что входящие в них параметры $\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2$ и $\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2$ по мере приближения к стенке возрастают. В то же время вдали от стенок, а также в свободных течениях вдали от источника, значения $\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2$ и $\left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2$, по-видимому, невелики.

Следует отметить, что в некоторых течениях, представляющих собой два слившихся пограничных слоя с различными свойствами (напр., пристенная струя, сочетающая в себе свойства пристенного и свободного пограничных слоев), масштаб l может оказаться неодинаковым поперек течения и тогда вблизи места слияния двух пограничных слоев $\frac{\partial l}{\partial y} \neq 0$.

В этом случае в формулы для \overline{uv} и $\overline{w^2}$ войдут также члены с $\left(\frac{\partial l}{\partial y} \right)$.

В частности,

$$\overline{uv} = - \left[N_1 q_0 l \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right) - N_{10} q_0 U \left(\frac{\partial l}{\partial y} \right) \right], \quad (16)$$

где $N_{10} = 2M_3 M_8$.

Поскольку экстремумы $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)$ и $\left(\frac{\partial l}{\partial y}\right)$, вообще говоря, не должны совпадать друг с другом, понятие турбулентной вязкости здесь теряет свой смысл, т. к. $\varepsilon \rightarrow \infty$ при $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$.

Осреднение произведений первичных компонент пульсации скорости дает $\overline{u_0 v_0} = \overline{v_0 \omega_0} = \overline{u_0 \omega_0} = 0$. Однако равенство $\overline{u_0^2} = \overline{v_0^2} = \overline{w_0^2}$ имеет место только при равной вероятности турбулентных пульсаций в любом направлении. К тому же и другие свойства изотропной турбулентности, к примеру $\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial v_0}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w_0}{\partial z}\right)^2$, в общем случае не удовлетворяются. Поэтому первичные составляющие пульсации скорости не являются изотропными.

Для определения q_0 может быть выведено уравнение баланса кинетической энергии первичной составляющей пульсации скорости. Такое уравнение получается в результате скалярного умножения на вектор \vec{q}_0 уравнения движения для мгновенных параметров

$$[(\vec{Q} + \vec{q}) \cdot \nabla](\vec{Q} + \vec{q}) = -\frac{1}{\rho} \nabla(P + p) + (\vec{F} + \vec{f}) + \nu \nabla^2(\vec{Q} + \vec{q}) \quad (17)$$

(P, p — осредненное статическое давление и его пульсация, \vec{F}, \vec{f} — осредненная массовая сила и ее пульсация, ν — коэффициент кинематической вязкости) с последующим осреднением согласно (13). С учетом (2), (5), (7), (8), (11), (12), аппроксимации пограничного слоя и допущения (а) уравнение баланса имеет вид

$$\frac{1}{2} \left(U \frac{\partial q_0^2}{\partial x} + V \frac{\partial q_0^2}{\partial y} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} (\overline{u_0 p / \rho}) - \frac{\partial}{\partial y} (\overline{v_0 p / \rho}) + \overline{u_0 f_x} + \overline{v_0 f_y}. \quad (18)$$

В отличие от обычного уравнения баланса турбулентной энергии в уравнении (18) отсутствуют члены, связанные с порождением энергии напряжениями сдвига и переносом энергии пульсациями скорости, а также с диссипацией энергии в явном виде. Два первых члена в правой части (18) учитывают работу переноса энергии пульсациями давления. Частично эта работа сводится к простому перераспределению энергии по объему течения. Однако другая часть работы остается невозстановимой. Действительно, в течениях, не поддерживаемых внешними силами (перепадом давлений, архимедовой силой и др.), хотя $\overline{p q_0} \rightarrow 0$ при x и $\pm y \rightarrow \infty$, $\int_{\Sigma} \nabla \cdot (\overline{p q_0}) d\delta = \int_S \overline{p q_0} d\vec{s} = T \neq 0$ при $\Sigma \rightarrow \infty$ (Σ — некоторый объем, включающий в себя течение, T — поток $\overline{p q_0}$, поступающий в этот объем) из-за наличия непрерывно действующего источника. Эта невозстановимая часть работы связана, по-видимому, с передачей энергии от крупномасштабной (энергосодержащей) к мелкомасштабной турбулентности (не описываемой настоящей моделью), что соответствует современным представлениям о структуре турбулентности [7]. Кроме того, при наличии приложенного к течению извне градиента давления (напр., у напорного течения в канале или трубе) появляется дополнительный источник благодаря пульсации этого градиента.

Поскольку через поперечные границы течения перенос энергии отсутствует, работа переноса в направлении y сводится только к перераспределению энергии. Предполагая, что это перераспределение носит характер градиентной диффузии, имеем

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\overline{pv_0/\rho}) = \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial y} \left[N_1 q_0 l \frac{\partial q_0^2}{\partial y} \right], \quad (19)$$

где A — коэффициент, аналогичный турбулентному числу Прандтля.

Работу переноса в продольном направлении представим (пренебрегая продольной диффузией энергии) в следующем виде:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\overline{pu_0/\rho}) = -B \frac{q_0^3}{l} + C \frac{\left(\frac{1}{\rho} \left| \frac{dP}{dx} \right| a \right)^{3/2}}{l}, \quad (20)$$

где $\left| \frac{dP}{dx} \right|$ — напорный градиент давления, B, C — константы. Форма

первого члена в правой части (20), аналогичного диссипативному члену в обычном уравнении баланса турбулентной энергии, обусловлена тем, что процесс переноса от крупно- к мелкомасштабным пульсациям завершается диссипацией энергии. Второй член, учитывающий порожденные энергии пульсациями напорного градиента давления, естественно принять прямо пропорциональным этому градиенту и обратно пропорциональным линейному масштабу турбулентности.

Форма членов в уравнении (18), связанных с массовой силой, зависит от того, какая массовая сила действует на течение.

Уравнение баланса (18) с учетом (19), (20) решается совместно с уравнениями осредненного движения. При этом в общем случае должны быть заданы зависимости $N_1 \left(\frac{y}{a} \right)$ и $l(x)$.

Возможен также альтернативный подход, связанный с выводом уравнения, аналогичного известному уравнению для турбулентной вязкости [11, 12]. Такое уравнение получается скалярным умножением уравнения

(17) на вектор \vec{l} . В результате этой операции с учетом (5), (7), (8), (9), (11), (12) и последующего осреднения по (13) получим

$$U \frac{\partial(q_0 l)}{\partial x} + V \frac{\partial(q_0 l)}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x}(\overline{l_x p/\rho}) - \frac{\partial}{\partial y}(\overline{l_y p/\rho}) + \overline{l_x f_x} + \overline{l_y f_y}. \quad (21)$$

Параметр $q_0 l$ отличается от коэффициента турбулентной вязкости, определяемого согласно (15), отсутствием множителя N_1 , являющегося в общем случае функцией y .

Если при замыкании уравнения (21) исходить из тех же соображений, что и при замыкании (18), то

$$-\frac{\partial}{\partial y}(\overline{l_y p/\rho}) = \frac{1}{A_1} \frac{\partial}{\partial y} \left[N_1 q_0 l \frac{\partial(q_0 l)}{\partial y} \right], \quad (22)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\overline{l_x p/\rho}) = -B_1 \frac{(q_0 l)^2}{l^2} + C_1 \frac{1}{\rho} \left| \frac{dP}{dx} \right| a, \quad (23)$$

где A_1, B_1, C_1 — константы.

Возможно также совместное использование уравнений (18) и (21). Эти уравнения с уравнениями неразрывности и движения с учетом (14), (19), (20), (22), (23) и при задании соответствующих зависимостей для пульсаций массовых сил составляют в случае свободного пограничного слоя замкнутую систему относительно $U(x, y)$, $V(x, y)$, $q_0(x, y)$ и $l(x)$. Для пристенного пограничного слоя, однако, остается необходимость задания зависимости $N_1\left(\frac{y}{a}\right)$.

Отметим в заключение, что изложенный выше подход может быть легко распространен и на осесимметричные пограничные слои. В частности, уравнения (14) (для uv), (18), (20), (21) и (23) полностью сохраняют свою форму, а уравнения (19) и (22) записываются в цилиндрических координатах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Н. М. Развитие приближенных теорий турбулентности и основные подходы к расчету течений с поперечным сдвигом. — Тр. МЭИ, 1971, вып. 81, с. 128—141.
2. Меллор Г., Херинг Х. Обзор моделей для замыкания уравнений осредненного турбулентного движения. — Ракетная техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 5, с. 17—29.
3. Колмогоров А. Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости. — Изв. АН СССР, Сер. физ., 1942, т. 6, № 1—2, с. 56—58.
4. Prandtl, L., Wieghardt, K. Über ein neues Formelsystem der ausgebildeten Turbulenz. — Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, 1945, H. 6, S. 6—19.
5. Rotta, I. C. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. — Z. Phys., 1951, Bd. 129, N 1, S. 547—572; Bd. 131, N 2, S. 51—77.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., 1974.
7. Хинце И. О. Турбулентность. М., 1963.
8. Taylor, J. The transport of vorticity and heat through fluids in turbulent motion. — Proc. Roy. Soc., 1932, Ser. A, v. 135, N 828, p. 697—700.
9. Гольдштейн С. (ред.) Современные проблемы гидроаэродинамики вязкой жидкости, т. 1. М., 1948.
10. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. М., 1968.
11. Nee, V. N., Kovasznay, L. S. G. Simple phenomenological theory of turbulent shear flows. — Phys. Fluids, 1969, v. 12, N 3, p. 473—484.
12. Секундов А. Н. Применение дифференциального уравнения для турбулентной вязкости к анализу плоских неавтономных течений. — Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5, с. 114—127.

Институт термодинамики и электрофизики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
3/II 1978

A. EPSTEIN

TURBULENTSETE VOOLUDE ARVUTAMINE KEERISÜLEKANDE TEORIA ALUSEL

Artiklis on esitatud uudne Taylori keerisülekande teorial põhinev moodus gradientvoolude arvutamiseks. On näidatud, et kahemõõtmelises piirikihis avaldub kiiruse pulsatsioon voolu kujunemise eeltingimustest ja ääretingimustest sõltuva osa ning keskmistatud kiiruse lokaalsete gradientide ja turbulentsi lineaarmastaabi proportsionaalsuskoeffitsientide summana. On esitatud avaldised turbulentsete nihke- ja normaalpingete arvutamiseks, primaarkomponendi turbulentsse energia diferentsiaalvõrrandid ja võrrand, mis on analoogiline üldtuntud turbulentsse viskoossuse bilansi võrrandiga, ning analüüsitud nimetatud võrrandite iseärasusi ja sulgemisvõimalusi.

A. EPSTEIN

ON THE CALCULATION OF TURBULENT FLOWS ON THE BASIS OF VORTICITY TRANSFER THEORY

A new approach to the calculation of turbulent shear flows based on Taylor's generalized vorticity transfer theory is proposed. For two-dimensional boundary layers a velocity fluctuation is shown to be a sum of a primary component, depending on the flow prehistory and boundary conditions, and components proportional to the local values of mean velocity and turbulent length scale gradients formulae for Reynolds shear and normal stresses are derived. As alternatives there are derived a balance equation for turbulent energy of the primary component and an equation analogical to the eddy viscosity balance equation. The peculiarities of these equations and ways of their closure are discussed.

1. Лавин Н. М. Развитие предположений теории переноса вихря в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

2. Миллер Л. Заметка о модели турбулентности. Вестник Ленинградского университета, 1972, т. 17, № 2, с. 123-124.

3. Космогрофский А. В. Основы теории турбулентности. М.: Наука, 1972.

4. Фридрихс В. Г. Введение в теорию турбулентности. М.: Наука, 1972.

5. Ротенберг Л. Я. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

6. Лавин Н. М. Основы теории турбулентности. М.: Наука, 1972.

7. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

8. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

9. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

10. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

11. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

12. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

13. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

14. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

15. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

16. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

17. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

18. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

19. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

20. Лавин Н. М. Турбулентность в плоском слое. Докл. АН СССР, 1971, т. 211, № 5, с. 123-124.

TURBULENTSE VOOLDE ARVITAMINE KEEBISLEKANDE TEORIA ALGEL

Arvitiin on eelalised andes laetud keebislaadude teooriat, mis põhineb vortitsiooni ülekandeteoorial. Kahe dimensionaalses piirkihi puhul näidatakse, et kihi kiirguse fluktuatsioon on summa primaarse komponendi, mis sõltub voolu eelajaloost ja piirkihi tingimustest, ja komponentidest, mis on proportsionaalsed keskmise kiirguse ja turbulentsuse pikkuskaala gradientidega. Deriveeritud on Reynolds' shear- ja normaalstresside valemid. Alternatiivina on tuletatud turbulentsuse energia bilansivõrrand primaarse komponendi jaoks ja võrrand, mis on analoogne eddy-viskositeedi bilansivõrrandiga. Arvutatatakse nende võrrandite sulgemise võimalikke viise.