

<https://doi.org/10.3176/phys.math.1978.4.04>

Л. ТУВИКЕНЕ

УДК 535.8; 621.375.82

## ВЛИЯНИЕ ДИФРАКЦИИ ОПОРНОЙ ВОЛНЫ НА ГОЛОГРАФИЧЕСКИЙ ПРОЦЕСС

(Представлена П. Кардом)

Лазерное излучение с волновым числом  $k = 2\pi/\lambda$  падает в виде плоской волны единичной амплитуды на амплитудно-фазовый фильтр [1] с круговой симметрией и пропусканием  $c(\rho)$ , заданным в круге  $0 \leq \rho \leq a = 10^5/k = 1$  см. Фильтр представляет собой объект.

Пусть фильтр состоит из двух компонентов с разным пропусканием. Тогда амплитуда в точке картины с координатой  $v$  выразится в виде суперпозиции [1]:

$$\begin{aligned} u_0(v, c_1, c_2, a_1) &= \sum_{i=1}^2 \{c_i \int_{a_{i-1}}^{a_i} J_0(v\rho) \rho d\rho\} = \\ &= (c_1 - c_2) a_1 \frac{J_1(a_1 v)}{v} + c_2 \frac{J_1(v)}{v}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $J_0, J_1$  — функции Бесселя порядка 0 и 1;  $v = ka$  ( $a$  — угловое расстояние точки наблюдения от центра картины);  $a_1$  — радиус круга, разделяющего компоненты фильтра ( $a_1 < 1$ );  $c_1$  — пропускание фильтра в зоне  $0 \leq \rho \leq a_1$ ;  $c_2$  — то же в зоне  $a_1 \leq \rho \leq a_2 = a = 1$ .

На окружающую данный фильтр область  $a \leq a_K \leq \rho \leq a_L \leq \infty$  падает такое же лазерное излучение, ослабляемое в общем случае во всех точках в одинаковой степени (учитывается соответствующим коэффициентом  $c_0 \leq 1$ ). Опорную волну представляет дифрагировавшая в этой области волна, влияние которой на точку картины с координатой  $v$  выражается формулой

$$\begin{aligned} u_t(v, a_K, a_L, c_0) &= c_0 \int_{a_K}^{a_L} J_0(v\rho) \rho d\rho = \\ &= c_0 \left[ a_L \frac{J_1(a_L v)}{v} - a_K \frac{J_1(a_K v)}{v} \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Результирующая амплитуда в точке голограммы (эмульсии фотопластинки) с координатой  $v$  выражается формулой

$$u(v) = u_0(v, c_i, a_1) + u_t(v, a_K, a_L, c_0), \quad (3)$$

а интенсивность — формулой

$$I(v) = I(v, c_i, a_1, a_K, a_L, c_0) = uu^* = u_0 u_0^* + u_t u_t^* + u_0 u_t^* + u_0^* u_t. \quad (4)$$

Рис. 1.

Результаты вычислений интенсивности по этой формуле в зависимости от величины дифракции опорной волны иллюстрирует рис. 1. Предполагается, что объект не изменяет фазы, т. е.  $c_1$  и  $c_2$  вещественны и положительны.

Исследование дифракционного эффекта в зоне  $0 \leq v \leq 10$  голограммы показывает, что с его ростом, т. е. с уменьшением  $a_L$  от 100 до 10 (или с возрастанием  $a_K$ ), уменьшается число максимумов

интенсивности и изменяются отношения их высот. При наибольшей дифракции ( $a_K = 1$ ,  $a_L = 2$ ) число этих максимумов в рассматриваемой зоне становится примерно в пять раз меньше, чем при  $a_L = 10$ ,  $a_K = 1$  или 2. В случае наименьшего дифракционного эффекта опорной волны (если  $a_L = 100$ ,  $a_K = 1$  или 2) число наблюдаемых на голограмме максимумов (минимумов) и отношения их высот можно приближенно принять за структуру голограммы, характерную для объекта. В данном случае в каждой зоне  $v_i \leq v \leq v_i + 1$  (если  $v_i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) голограммы поглощающего объекта с двумя компонентами наблюдается 31 максимум интенсивности (на рис. 1 они не показаны), которые обусловлены членами интерференции  $u_0 u_i$  объектной и опорной волн в распределении (4). При этом значения их максимумов быстро убывают с ростом  $v_i$  ( $v_i = 0, 1, 2, 3, \dots$ ) согласно приближенному закону  $1:1,3 \cdot 10^{-1}:1,3 \cdot 10^{-3}:3 \cdot 10^{-4}:\dots$

Указанное число максимумов остается почти таким же при переходе от амплитудного объекта к фазовому (в котором световая фаза изменяется на  $\pi$ ); становятся другими лишь расположение максимумов и отношение их высот.

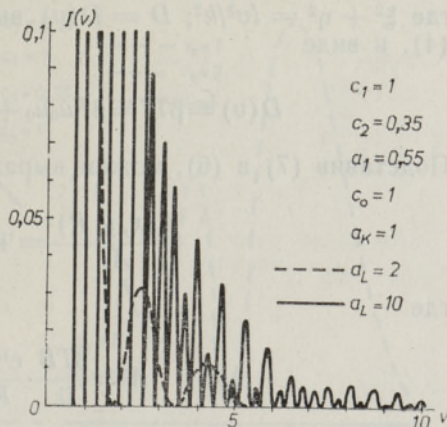
В плоскости голограммы  $(\xi, \eta)$  распределение пропускания фотоэмульсии дается формулой ([<sup>2</sup>], с. 118)

$$D(\xi, \eta) = \beta T I = \beta T u u^*, \quad (5)$$

где коэффициент  $\beta$  определяется свойствами фотоэмульсии,  $T$  — время экспозиции.

Для восстановления оптического изображения голограмма с пропусканием (5) освещается лазерным излучением (с волновым числом  $k$ ). Плоская волна, дифрагированная на голограмме, дает на расстоянии  $R$  от голограммы в плоскости  $(x, y)$ , параллельной плоскости голограммы, распределения амплитуды  $\Psi(x, y, R)$ . Применяя для нахождения  $\Psi(x, y, R)$  теорию дифракции Кирхгофа ([<sup>3</sup>], с. 345; [<sup>2</sup>]), в случае френелевской дифракции получим формулу

$$\Psi(x, y, R) = \frac{B}{i\lambda} \frac{e^{ikR}}{R} e^{i \frac{\hbar}{2R}(x^2+y^2)} \times \\ \times \iint D(\xi, \eta) e^{i \frac{\hbar}{2R}(\xi^2+\eta^2)} e^{-i \frac{\hbar}{R}(x\xi+y\eta)} d\xi d\eta, \quad (6)$$



где  $\xi^2 + \eta^2 = lv^2/k^2$ ;  $D = D(v)$  выражается, согласно формулам (5) и (4), в виде

$$D(v) = \beta TI = \beta T u_0 u_0^* + \beta T u_t u_t^* + \beta T u_0 u_t^* + \beta T u_0^* u_t. \quad (7)$$

Подставив (7) в (6), можем выразить  $\Psi$  как сумму четырех членов:

$$\frac{\Psi(x, y, R)}{A} = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4, \quad (8)$$

где

$$A = \frac{\beta TB}{i\lambda} \frac{e^{ikhR}}{R} e^{i \frac{k}{2R} (x^2 + y^2)}.$$

Для восстановления оптического изображения существенное значение имеют члены  $\Psi_3$  и  $\Psi_4$  выражения (8), которые, отражая взаимосвязь объектной и опорной волн, представляют действительное и мнимое изображения. В случае вещественных  $c_i$  верно  $\Psi_3 = \Psi_4$ .

Поскольку  $D(v)$  обладает круговой симметрией, целесообразно перейти к полярным координатам  $v, \varphi$ . Тогда, согласно (6), в направлении, перпендикулярном плоскости голограммы (при  $x = 0, y = 0$ ),  $\Psi$  принимает вид (после интегрирования по  $\varphi$ )

$$\frac{\Psi(0, 0, R)}{2\pi A} = \int_0^{v_0} I(v) e^{i \frac{lv^2}{2kR}} v dv, \quad (9)$$

где  $v_0$  определяет величину освещенной области голограммы.

Подставляя в третий (или четвертый) член уравнения (7) формулы (1) и (2), находим

$$\Psi_3(0, 0, R) = \Psi_3(R) + i\Psi_{3im}, \quad (10)$$

где [4]

$$\begin{aligned} \Psi_3(R) &= \Psi_3(R, c_1, c_2, a_1, c_0, a_K, a_L) = \\ &= c_0(c_1 - c_2) a_1 a_L \int_0^{v_0} \frac{J_1(a_1 v)}{v} J_1(a_L v) \cos\left(\frac{lv^2}{2kR}\right) dv - \\ &- c_0(c_1 - c_2) a_1 a_K \int_0^{v_0} \frac{J_1(a_1 v)}{v} J_1(a_K v) \cos\left(\frac{lv^2}{2kR}\right) dv + \\ &+ c_0 c_2 a_L \int_0^{v_0} \frac{J_1(v)}{v} J_1(a_L v) \cos\left(\frac{lv^2}{2kR}\right) dv - \\ &- c_0 c_2 a_K \int_0^{v_0} \frac{J_1(v)}{v} J_1(a_K v) \cos\left(\frac{lv^2}{2kR}\right) dv. \end{aligned} \quad (11)$$

Входящие в формулу для  $\Psi_3(R)$  интегралы

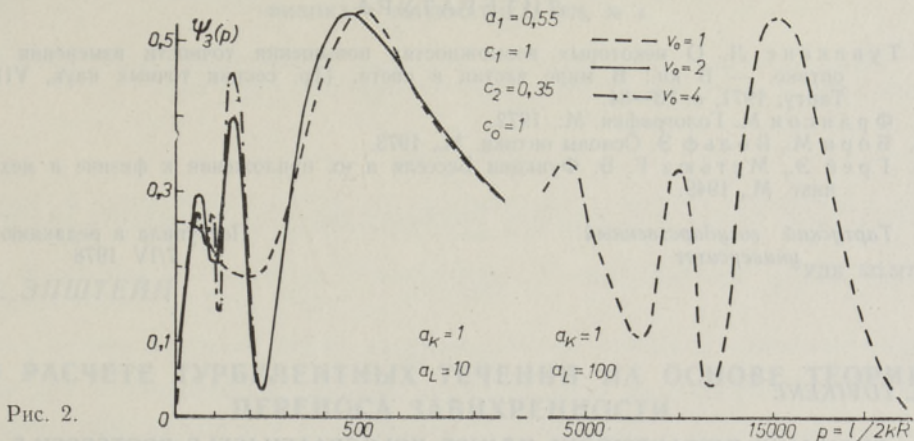


Рис. 2.

$$I_n = \int_0^{v_0} \frac{J_1(\alpha v) J_1(\beta v)}{v} \cos(pv^2) dv, \quad (12)$$

где  $p = l/2kR$ , при  $v_0 = 1, 2, 4$  вычислялись с помощью ЭВМ. В случае  $v_0 = \infty$  интеграл этого типа был представлен в виде разложения в гипергеометрические ряды. Оказалось, что  $\Psi_3(R, v_0 = \infty)$  мало отличается от  $\Psi_3(R, v_0 = 4)$ .

На рис. 2 показаны для некоторых частных случаев амплитудные распределения  $\Psi_3(p)$ , вычисленные вышеизложенным способом.

В результате расчетов выяснилось следующее. Чем меньше дифракция опорной волны (т. е. чем больше  $a_L$  и меньше  $a_K$ ), тем ближе к голограмме локализуется восстановленное оптическое изображение (отличное от нуля амплитудное распределение) и тем дальше оно простирается вдоль нормали голограммы (с несколькими максимумами). При этом расширяется главный максимум, который практически определяет глубину и объемность фокусировки изображения.

В случае наибольшего дифракционного эффекта опорной волны ( $a_K = 1, a_L = 2$ ) восстановленное изображение локализуется очень далеко от голограммы ( $0 \leq p < 500$ ). Если при восстановлении изображения освещается область  $0 \leq v \leq v_0 = 2$ , главный максимум находится при  $p = 50$ ; если же  $v_0 = 1$ , он смещается в точку  $p = 0$  ( $R = \infty$ ).

Существенную роль при восстановлении оптического изображения играют величина освещенной области голограммы и ее расположение. Чем больше эта область, тем яснее проступают побочные максимумы вдоль нормали голограммы. Известно, что в случае малого дифракционного эффекта опорной волны значения характерных для объекта максимумов интенсивности на голограмме особенно велики в промежутке  $0 \leq v \leq 1$ . Эта область голограммы и определяет действительную структуру восстановленного изображения; существенное дополнение к изображению дает также область  $1 \leq v_0 \leq 2$ ; остальная часть голограммы  $2 \leq v_0 < \infty$  уточняет лишь тонкую структуру изображения.

При переходе от амплитудного объекта к фазовому изменения в структуре восстановленного изображения незначительны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Тувикене Л. О некоторых возможностях повышения точности измерения в оптике. — В кн.: В мире частиц и света. (Тр. секции точных наук, VI). Тарту, 1971, с. 73—84.
2. Франсон М. Голография. М., 1972.
3. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1973.
4. Грей Э., Метьюз Г. Б. Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М., 1949.

*Тартуский государственный  
университет*

Поступила в редакцию  
7/IV 1978

*L. TUVIKENE*

### TUGILAINE DIFRAKTSIOONI MÕJUST HOLOGRAAFILISELE PROTSESSILE

On arvatatud hologrammi struktuur juhtudel, kui objektiks on amplituud- või amplituud-faasifilter, ning analüüsitud hologrammi sõltuvust tugilaine difraktsioonist. Optilise kujutise taastamiseks on tuletatud 6-parametiline avaldis (11). Kujutise ruumilisuse sõltuvust hologrammi suurusest on käsitletud mitmel eri juhul. Tulemused näitavad, et mida väiksem on tugilaine difraktsiooni efekt, seda lähemale hologrammile kujutis lokaliseerub ja seda laiemale alale piki hologrammi normaali ta laotub.

*L. TUVIKENE*

### EFFECT OF REFERENCE WAVE DIFFRACTION ON THE HOLOGRAPHIC PROCESS

The structure of the hologram is calculated in case amplitude and the phase-amplitude filter serve as research objects. The dependence of the hologram on reference wave diffraction is analysed. For the reconstruction of the optical image an expression (11) of 6 parameters has been derived. The dependence of the spatial image on the magnitude of the hologram has been studied in several special cases. The results demonstrate that the smaller the effect of reference wave diffraction the closer the image is located to the hologram and the wider is the area which it occupies along the normal of the hologram.