LÜHIUURIMUSI * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 26. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1977.4.16

УДК 625.72:681.3—523.8

Х. МЯГИ, М. ЛЕВИН

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ТРАССИРОВАНИЕ АВТОМОБИЛЬНОЙ ДОРОГИ НА ЭВМ

H. MÄGI, M. LEVIN. AUTOTEEDE POLÜNOOMNE TRASSEERIMINE ELEKTRONARVUTI ABIL

H. MÄGI, M. LEVIN. POLYNOMIC ROUTE LOCATION BY COMPUTER

В известных программных системах трассирования автомобильной дороги соединяются либо заранее выбранные прямые линии с круговыми и клотоидными кривыми, либо заранее выбранные элементы (прямые участки, дуги окружности) с клотоидными вставками [1].

Дальнейшей экономии инженерного труда на трассирование автодороги можно достичь путем замены нескольких отдельных элементов

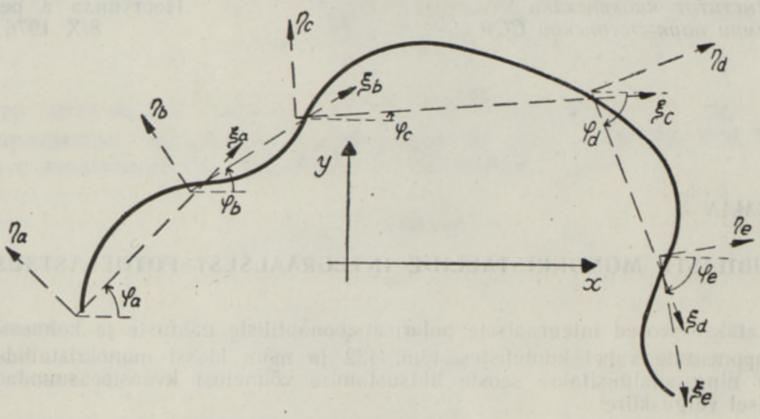

Рис. 1. Разбивка приближенной трассы на локальные зоны: x, y — координаты общей системы; ξ_a, η_a, ξ_b, η_b, ... — координаты локальных зон; φ_a, φ_b, ... — повороты локальных координатных осей.

трассы одной непрерывной линией. Целесообразна следующая методика трассирования:

— вычерчивание от руки приближенной трассы на топографическом плане или аэрофотоснимке с выбором на ней точек двух разновидностей: жестких и свободных;

— разбивка трассы на такие зоны, где нет точек перегиба и где модуль кривизны имеет один и только один локальный экстремум (рис. 1);

— уточнение на ЭВМ трассы таким образом, чтобы она соединяла все жесткие точки и возможно ближе подходила к свободным точкам,

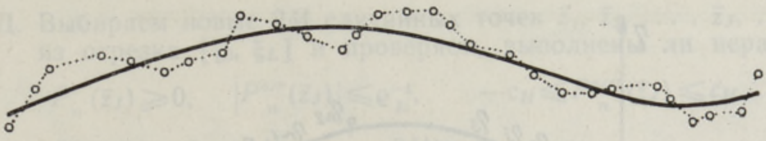

Рис. 2. Огибание границы земельных угодий полиномиальной трассой: ——— трасса; ...... граница земельных угодий; O выбранные свободные точки.

В каждой локальной зоне трассу можно представить полиномом n-й степени * (индексы у координат зоны опущены):

$$\eta = P_n(\xi) = \sum_{i=0}^{n} a_i \xi^i. \tag{1}$$

Полиномиальная трасса гораздо лучше обыкновенной обеспечивает огибание границ земельных угодий (рис. 2), проход в узких местах между строениями и т. д. При достаточно большом значении степени n, плавность полиномиальной трассы не уступает плавности клотоидной.

При определении параметров зонального полинома (1) необходимо гарантировать ограниченность кривизны

$$|k| = |\varrho^{-1}| \leqslant \varrho_H^{-1}, \tag{2}$$

ограниченность бокового ускорения

$$|k'| \leqslant c_H \tag{3}$$

и единственность локального экстремума кривизны внутри зоны

$$k''(\xi)\, k''(\xi_t) \geqslant 0. \tag{4}$$

Здесь ϱ_H и c_H — постоянные, значения которых задаются в нормативных документах; ξ_t — абсцисса фиксированной точки внутри зоны, где $k''(\xi_t) \neq 0$.

Ввиду малости первой производной полинома $P_n(\xi)$ в средней части зоны, допустимости малых неточностей и при соблюдении условий (2)—(4) кривизну трассы k и ее производные можно выразить приближенными формулами

$$k \approx P''_n(\xi), \quad k' \approx P'''_n(\xi), \quad k'' \approx P^{(4)}_n(\xi).$$

Итак, задача построения полиномиальной трассы в локальной зоне формулируется следующим образом.

Требуется провести кривую $\eta = P_n(\xi)$ так, чтобы она удовлетворяла условиям:

а) непрерывности на границах зон, т. е. $P_n(\xi_0) = 0$, $P_n(\xi_L) = 0$, $P'_n(\xi_0) = \eta'_0$, $P'_n(\xi_L) = \eta'_L$, $P''_n(\xi_0) = \eta''_0$ и $P''_n(\xi_L) = \eta''_L$, где ξ_0, ξ_L, η'_0, η'_L, η''_0 и η''_L — заданные величины (рис. 3);

б) прохождения через жесткие точки (ξ_j, η_j), т. е. $P_n(\xi_j) = \eta_j$, где $j = 1, \ldots, m$;

в) знакопостоянности полинома $P_n(\xi)$ в зоне $[\xi_0, \xi_L]$ (знак полинома задан **);

* О выборе степени см. ниже.

** Для конкретности будем считать его положительным.

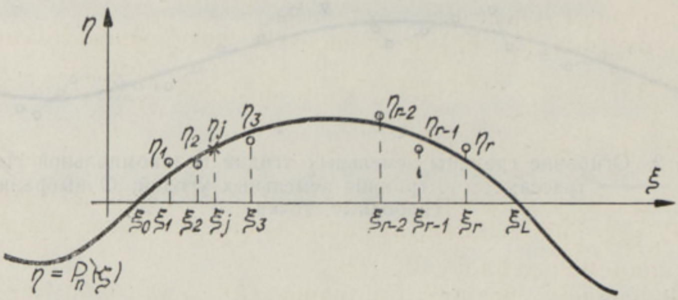

Рис. 3. Локальная зона трассы: ——— трасса; ○ свободная точка; ╳ жесткая точка.

г) ограниченности второй производной полинома $|P''_n(\xi)| \leqslant \varrho_H^{-1}$ в зоне $[\xi_0, \xi_L]$ (знак задан);

д) ограниченности третьей производной полинома $|P'''_n(\xi)| \leqslant c_H$ в зоне $[\xi_0, \xi_L]$;

е) знакопостоянности четвертой производной полинома $P_n^{(4)}(\xi)$ в зоне $[\xi_0, \xi_L]$ (знак задан);

ж) прохождения графика $P_n(\xi)$ как можно ближе к свободным точкам (ξ_k, η_k) $(k = 1, 2, \ldots, r)$.

Выполнение условия (ж) будем осуществлять методом наименьших квадратов. Трудности, связанные с реализацией условий (в)—(е) при математическом решении задачи, обойдем следующим образом. Требование выполнения условия на всем отрезке $[\xi_0, \xi_L]$ заменим требованием выполнения его на системе случайных (равномерно распределенных) точек этого отрезка; при достаточно большом количестве таких точек с вероятностью, близкой к 1, получим выполнение исходного требования.

Блочная схема решения сформулированной выше задачи такова:

блок А. Выбираем n (напр., $n = m + 8$).

блок Б. Выбираем число M (напр., $M = 2n$) и генерируем M случайных точек $z_1, z_2, \ldots, z_M$ из отрезка $[\xi_0, \xi_L]$.

блок В. Решаем задачу квадратичного программирования [2]: выбрать числа $a_0, a_1, \ldots, a_n$ так, чтобы при выполнении условий

$$P_n(\xi_0) = P_n(\xi_L) = 0, \quad P'_n(\xi_0) = \eta'_0, \quad P'_n(\xi_L) = \eta'_L,$$

$$P''_n(\xi_0) = \eta''_0, \quad P''_n(\xi_L) = \eta''_L,$$

$$P_n(\xi_j) = \eta_j \ (j = 1, \ldots, m), \quad P_n(z_J) \geqslant 0 \ (J = 1, \ldots, M),$$

$$P_n(\xi_k) \geqslant 0 \ (k = 1, \ldots, r), \quad |P''_n(z_J)| \leqslant \varrho_H^{-1} \ (J = 1, \ldots, M),$$

$$|P''_n(\xi_k)| \leqslant \varrho_H^{-1} \ (k = 1, \ldots, r), \quad -c_H \leqslant P'''_n(z_J) \leqslant c_H \ (J = 1, \ldots, M),$$

$$-c_H \leqslant P'''_n(\xi_k) \leqslant c_H \ (k = 1, \ldots, r), \quad P_n^{(4)}(z_J) \geqslant 0 \ (J = 1, \ldots, M),$$

$$P_n^{(4)}(\xi_k) \geqslant 0 \ (k = 1, \ldots, r),$$

величина $F = \sum_{k=1}^{n} [P_n(\xi_k) - \eta_k]^2$ имела наименьшее значение.

блок Г. Если эта задача не имеет решения, то увеличиваем n (напр., на 2) и возвращаемся к блоку В. Если задача имеет решение $P^*_n(\xi)$, то переходим к следующему блоку.

блок Д. Выбираем новые $2M$ случайных точек $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_J, \ldots, \bar{z}_{2M}$ из отрезка $[\xi_0, \xi_L]$ и проверяем, выполнены ли неравенства

$$P^*_n(\bar{z}_J) \geqslant 0, \quad |P^{*''}_n(\bar{z}_J)| \leqslant \varrho^{-1}_H, \quad -c_H \leqslant P^{*'''}_n(\bar{z}_J) \leqslant c_H,$$

$$P^{*(4)}_n(\bar{z}_J) \geqslant 0 \quad (J=1, \ldots, 2M).$$

блок Е. Если эти неравенства выполнены, считаем искомый полином $P^*_n(\xi)$ найденным, в ином случае заменяем M на $2M$ и возвращаемся к блоку В.

блок Ж. Проверяем среднее отклонение Fr^{-1} для полученного полинома $P^*_n(\xi)$. Если это отклонение окажется неприемлемо большим, то увеличиваем n и возвращаемся к блоку В. В ином случае считаем искомый полином найденным.

Значения ξ_0, ξ_L, η'_0, η'_L, η''_0 и η''_L, задаваемые в условии (а), не всегда могут быть окончательно определены в процессе приближенного трассирования (графическим путем). В этих случаях их можно найти решением аналогичной задачи квадратичного программирования с использованием для каждой зоны только условий (б)—(ж). Эти значения на каждой границе применяются для определения увязанных граничных условий для двух соседних зон в виде взвешенных средних.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев М. А., Автомобильные дороги, № 3, 21 (1974).
2. Зуховицкий С. Н., Авдеева Л. И., Линейное и выпуклое программирование, М., 1964.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 2/XI 1976