

Х. МЯГИ, М. ЛЕВИН

ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ТРАССИРОВАНИЕ АВТОМОБИЛЬНОЙ
ДОРОГИ НА ЭВМ

H. MAGI, M. LEVIN. AUTOTEEDE POLÜNOOMNE TRASSEERIMINE ELEKTRONARVUTI ABIL

H. MAGI, M. LEVIN. POLYNOMIC ROUTE LOCATION BY COMPUTER

В известных программных системах трассирования автомобильной дороги соединяются либо заранее выбранные прямые линии с круговыми и клотоидными кривыми, либо заранее выбранные элементы (прямые участки, дуги окружности) с клотоидными вставками [1].

Дальнейшей экономии инженерного труда на трассирование автодороги можно достичь путем замены нескольких отдельных элементов

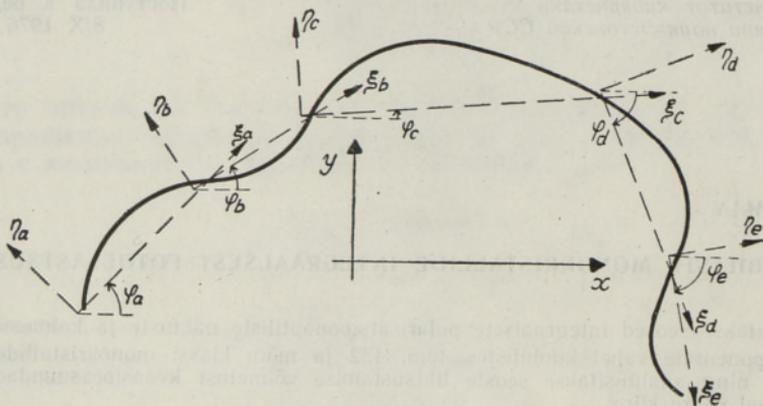


Рис. 1. Разбивка приближенной трассы на локальные зоны: x, y — координаты общей системы; $\xi_a, \eta_a, \xi_b, \eta_b, \dots$ — координаты локальных зон; $\varphi_a, \varphi_b, \dots$ — повороты локальных координатных осей.

трассы одной непрерывной линией. Целесообразна следующая методика трассирования:

— вычерчивание от руки приближенной трассы на топографическом плане или аэрофотоснимке с выбором на ней точек двух разновидностей: жестких и свободных;

— разбивка трассы на такие зоны, где нет точек перегиба и где модуль кривизны имеет один и только один локальный экстремум (рис. 1);

— уточнение на ЭВМ трассы таким образом, чтобы она соединяла все жесткие точки и возможно ближе подходила к свободным точкам,

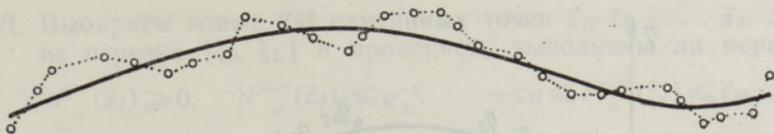


Рис. 2. Огибание границы земельных угодий полиномиальной трассой: — трасса; граница земельных угодий; O выбранные свободные точки.

В каждой локальной зоне трассу можно представить полиномом n -й степени* (индексы у координат зоны опущены):

$$\eta = P_n(\xi) = \sum_{i=0}^n a_i \xi^i. \quad (1)$$

Полиномиальная трасса гораздо лучше обыкновенной обеспечивает огибание границ земельных угодий (рис. 2), проход в узких местах между строениями и т. д. При достаточно большом значении степени n , плавность полиномиальной трассы не уступает плавности клотоидной.

При определении параметров зонального полинома (1) необходимо гарантировать ограниченность кривизны

$$|k| = |q^{-1}| \leq q_H^{-1}, \quad (2)$$

ограниченность бокового ускорения

$$|k'| \leq c_H \quad (3)$$

и единственность локального экстремума кривизны внутри зоны

$$k''(\xi) k''(\xi_t) \geq 0. \quad (4)$$

Здесь q_H и c_H — постоянные, значения которых задаются в нормативных документах; ξ_t — абсцисса фиксированной точки внутри зоны, где $k''(\xi_t) \neq 0$.

Ввиду малости первой производной полинома $P_n(\xi)$ в средней части зоны, допустимости малых неточностей и при соблюдении условий (2)–(4) кривизну трассы k и ее производные можно выразить приближенными формулами

$$k \approx P_n''(\xi), \quad k' \approx P_n'''(\xi), \quad k'' \approx P_n^{(4)}(\xi).$$

Итак, задача построения полиномиальной трассы в локальной зоне формулируется следующим образом.

Требуется провести кривую $\eta = P_n(\xi)$ так, чтобы она удовлетворяла условиям:

а) непрерывности на границах зон, т. е. $P_n(\xi_0) = 0$, $P_n(\xi_L) = 0$, $P_n'(\xi_0) = \eta'_0$, $P_n'(\xi_L) = \eta'_L$, $P_n''(\xi_0) = \eta''_0$ и $P_n''(\xi_L) = \eta''_L$, где ξ_0 , ξ_L , η'_0 , η'_L , η''_0 и η''_L — заданные величины (рис. 3);

б) прохождения через жесткие точки (ξ_j, η_j) , т. е. $P_n(\xi_j) = \eta_j$, где $j = 1, \dots, m$;

в) знакопостоянности полинома $P_n(\xi)$ в зоне $[\xi_0, \xi_L]$ (знак полинома задан**);

* О выборе степени см. ниже.

** Для конкретности будем считать его положительным.

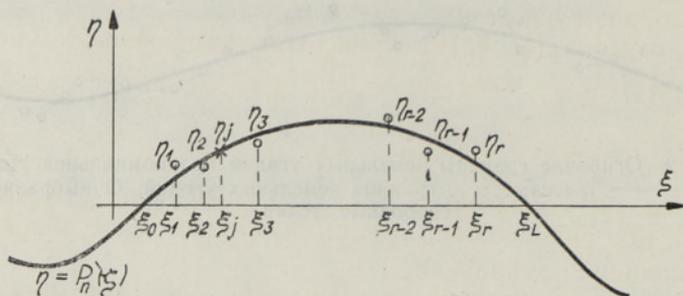


Рис. 3. Локальная зона трассы: — трасса; ○ свободная точка; × жесткая точка.

- г) ограниченности второй производной полинома $|P_n''(\xi)| \leq \varrho_H^{-1}$ в зоне $[\xi_0, \xi_L]$ (знак задан);
 д) ограниченности третьей производной полинома $|P_n'''(\xi)| \leq c_H$ в зоне $[\xi_0, \xi_L]$;
 е) знакопостоянности четвертой производной полинома $P_n^{(4)}(\xi)$

в зоне $[\xi_0, \xi_L]$ (знак задан);
 ж) прохождения графика $P_n(\xi)$ как можно ближе к свободным точкам (ξ_k, η_k) ($k = 1, 2, \dots, r$).

Выполнение условия (ж) будем осуществлять методом наименьших квадратов. Трудности, связанные с реализацией условий (в) — (е) при математическом решении задачи, обойдем следующим образом. Требование выполнения условия на всем отрезке $[\xi_0, \xi_L]$ заменим требованием выполнения его на системе случайных (равномерно распределенных) точек этого отрезка; при достаточно большом количестве таких точек с вероятностью, близкой к 1, получим выполнение исходного требования.

Блочная схема решения сформулированной выше задачи такова: блок А. Выбираем n (напр., $n = m + 8$).

блок Б. Выбираем число M (напр., $M = 2n$) и генерируем M случайных точек z_1, z_2, \dots, z_M из отрезка $[\xi_0, \xi_L]$.

блок В. Решаем задачу квадратичного программирования [2]: выбрать числа a_0, a_1, \dots, a_n так, чтобы при выполнении условий

$$P_n(\xi_0) = P_n(\xi_L) = 0, \quad P_n'(\xi_0) = \eta_0', \quad P_n'(\xi_L) = \eta_L',$$

$$P_n''(\xi_0) = \eta_0'', \quad P_n''(\xi_L) = \eta_L'',$$

$$P_n(\xi_j) = \eta_j \quad (j=1, \dots, m), \quad P_n(z_J) \geq 0 \quad (J=1, \dots, M),$$

$$P_n(\xi_k) \geq 0 \quad (k=1, \dots, r), \quad |P_n''(z_J)| \leq \varrho_H^{-1} \quad (J=1, \dots, M),$$

$$|P_n''(\xi_k)| \leq \varrho_H^{-1} \quad (k=1, \dots, r), \quad -c_H \leq P_n'''(z_J) \leq c_H \quad (J=1, \dots, M),$$

$$-c_H \leq P_n'''(\xi_k) \leq c_H \quad (k=1, \dots, r), \quad P_n^{(4)}(z_J) \geq 0 \quad (J=1, \dots, M),$$

$$P_n^{(4)}(\xi_k) \geq 0 \quad (k=1, \dots, r),$$

величина $F = \sum_{k=1}^n [P_n(\xi_k) - \eta_k]^2$ имела наименьшее значение.

блок Г. Если эта задача не имеет решения, то увеличиваем n (напр., на 2) и возвращаемся к блоку В. Если задача имеет решение $P_n^*(\xi)$, то переходим к следующему блоку.

блок Д. Выбираем новые $2M$ случайных точек $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_J, \dots, \bar{z}_{2M}$ из отрезка $[\xi_0, \xi_L]$ и проверяем, выполнены ли неравенства

$$P_n^*(\bar{z}_J) \geq 0, \quad |P_n^{**}(\bar{z}_J)| \leq \sigma_H^{-1}, \quad -c_H \leq P_n^{***}(\bar{z}_J) \leq c_H,$$

$$P_n^{*(4)}(\bar{z}_J) \geq 0 \quad (J=1, \dots, 2M).$$

блок Е. Если эти неравенства выполнены, считаем искомым полином $P_n^*(\xi)$ найденным, в ином случае заменяем M на $2M$ и возвращаемся к блоку В.

блок Ж. Проверяем среднее отклонение F_r^{-1} для полученного полинома $P_n^*(\xi)$. Если это отклонение окажется неприемлемо большим, то увеличиваем n и возвращаемся к блоку В. В ином случае считаем искомым полином найденным.

Значения $\xi_0, \xi_L, \eta'_0, \eta'_L, \eta''_0$ и η''_L , задаваемые в условии (а), не всегда могут быть окончательно определены в процессе приближенного трассирования (графическим путем). В этих случаях их можно найти решением аналогичной задачи квадратичного программирования с использованием для каждой зоны только условий (б) — (ж). Эти значения на каждой границе применяются для определения увязанных граничных условий для двух соседних зон в виде взвешенных средних.

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорьев М. А., Автомобильные дороги, № 3, 21 (1974).
2. Зуховицкий С. Н., Авдеева Л. И., Линейное и выпуклое программирование, М., 1964.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
2/XI 1976