

Э. БРОСМАН

## ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОТОУПРУГОСТИ КУБИЧЕСКИХ МОНОКРИСТАЛЛОВ

В настоящее время все большее значение приобретает выращивание крупноразмерных монокристаллов и их применение в технике в целом виде. В связи с этим появляется необходимость в разработке неразрушающей методики определения технологических напряжений, возникающих при выращивании и термической обработке монокристаллов.

Теоретические исследования трехмерных внутренних напряжений относятся в основном к монокристаллам с круговой симметрией распределения напряжений [1, 2]. Для монокристаллов прямоугольной и квадратной формы было определено только тепловое поле, а напряжения, из-за трудности учета теплообмена между кристаллом и окружающей средой в условиях выращивания монокристаллов, вычислить не удалось [3]. «Аномально» распределенные остаточные напряжения, возникающие в процессе отжига монокристаллов, изучались только на пластинках щелочногалоидных соединений [4].

Одним из эффективных экспериментальных методов изучения внутренних напряжений в прозрачных кубических монокристаллах является метод фотоупругости. Исходя из общей теории фотоупругости кристаллов [5, 6] детально разработаны методы определения плоского напряженного состояния в пластинках, вырезанных из кубических монокристаллов параллельно грани куба [7, 8], а также в произвольно ориентированных кристаллических пластинках [9–11] с учетом переработанной таблицы пьезооптических коэффициентов [12]. Некоторые частные случаи одноосного напряжения в кубических монокристаллах проанализированы в [13–15].

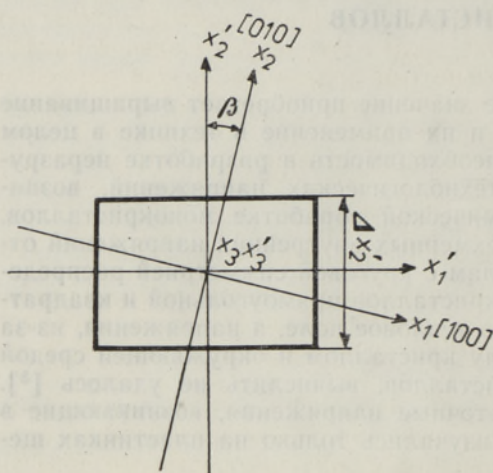
При исследовании трехмерного напряженного состояния в наиболее распространенных монокристаллах цилиндрической или призматической формы обычно определяется плоское напряженное состояние в пластинках, вырезанных из кристаллов [16]. Переход от напряжений в этих пластинках к напряжениям в целом монокристалле возможен лишь в частных случаях [2] и требует дополнительного предположения о перераспределении напряжений при разрезе продольных и поперечных срезов целого кристалла [17–19].

При изучении внутренних напряжений в монокристаллах неразрушающим методом обычно ограничиваются или определением на основе измеренной интегральной разности хода средних напряжений в поперечном сечении кристалла [20], или же определением распределения осевых напряжений при дополнительных предположениях о характере этого распределения [21].

Трудности, препятствующие исследованию трехмерного напряженного состояния в кубических монокристаллах, обусловлены тем, что

главные оси диэлектрического эллипсоида в общем случае не коллинеарны с главными осями эллипсоида напряжений. Соотношения между поляризационно-оптическими величинами и компонентами напряжения зависят от направления просвечивания относительно кристаллографических осей.

В данной статье выводятся соотношения между интегральными поляризационно-оптическими явлениями и компонентами трехмерного напряжения для кубических монокристаллов классов  $\bar{4}3m$ ,  $432$  и  $m\bar{3}m$  при просвечивании в кристаллографической плоскости  $(001)$ , представляющей наибольший практический интерес. Анализируется также возможность упрощения уравнений при слабом вращении квазиглавных направлений на световом пути.



В трехмерной фотоупругости монокристаллов целесообразно компоненты напряжения  $\sigma_{kl}$  ( $k, l = 1, 2, 3$ ) описывать в координатных осях, совпадающих с кристаллографическими осями, а наблюдаемые оптические явления описывать в координатной системе, определяемой направлением просвечивания. Из монокристалла мысленно выделяется перпендикулярно направлению распространения света  $x'_2$  слой толщиной  $\Delta x'_2$  (см. рисунок). Когда направление просвечивания  $x'_2$  составит с кристаллографическим направлением  $[010]$  в плос-

кости  $(001)$  угол  $\beta$ , на оптические явления начнут влиять компоненты диэлектрического тензора  $\epsilon'_{11}$ ,  $\epsilon'_{33}$  и  $\epsilon'_{31}$ .

В кубических монокристаллах классов  $m\bar{3}m$ ,  $\bar{4}3m$  и  $432$  компоненты диэлектрического тензора  $\epsilon'_{ij}$  связаны с компонентами напряжения  $\sigma_{kl}$  соотношениями

$$\epsilon'_{11} = [\pi_{11}\sigma_{11} + \pi_{12}(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \cos^2 \beta + [\pi_{12}(\sigma_{11} + \sigma_{33}) + \pi_{11}\sigma_{22}] \sin^2 \beta + \pi_{44}\sigma_{12} \sin 2\beta, \quad (1)$$

$$\epsilon'_{33} = \pi_{12}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) + \pi_{11}\sigma_{33}, \quad (2)$$

$$\epsilon'_{31} = \pi_{44}(\sigma_{31} \cos \beta + \sigma_{23} \sin \beta), \quad (3)$$

где  $\pi_{kl}$  — пьезооптические коэффициенты в матричном обозначении [13]. Переходя к квазиглавному значению диэлектрического тензора  $\epsilon'_1$  и  $\epsilon'_3$  в плоскости  $x'_1x'_3$  (см. рисунок), получаем соотношения, связывающие оптическую разность хода  $\delta$  и параметр оптической изоклины  $\varphi$  (отсчитанной от оси  $x'_1$ ) с компонентами напряжения в исследуемом слое:

$$\delta \cos 2\varphi = p \Delta x'_2, \quad (4)$$

$$\delta \sin 2\varphi = q \Delta x'_2, \quad (5)$$

где

$$p = 1/2\pi_0^3 [(\pi_{11} - \pi_{12})(\sigma_{11} \cos^2 \beta + \sigma_{22} \sin^2 \beta - \sigma_{33}) + \pi_{44}\sigma_{12} \sin 2\beta], \quad (6)$$

$$q = 1/2n_0^3 \cdot 2\pi_{44} (\sigma_{31} \cos \beta + \sigma_{23} \sin \beta), \quad (7)$$

$n_0$  — показатель преломления.

Уравнения (4) и (5) можно представить также в виде

$$\delta = \sqrt{p^2 + q^2} \Delta x'_2, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = q/p. \quad (9)$$

На практике часто приходится определять напряжения в кубических монокристаллах призматической или цилиндрической формы при отсутствии осевого градиента напряжений. В этом случае компоненты напряжения  $\sigma_{31}$  и  $\sigma_{23}$  равняются нулю и из уравнения (9) с учетом соотношения (7) следует, что параметр оптической изоклины равняется или нулю или  $90^\circ$ . Следовательно, при просвечивании монокристалла в любом направлении в плоскости (001) одно главное направление оптической анизотропии всегда параллельно оси призмы, а другое перпендикулярно к ней. Так как главные направления оптической анизотропии на пути светового луча постоянны, то используя интегральный закон Вертгейма [22], суммарную разность хода можно выразить соотношением

$$\delta = 1/2n_0^3 \int [(\pi_{11} - \pi_{12})(\sigma_{11} \cos^2 \beta + \sigma_{22} \sin^2 \beta - \sigma_{33}) + \pi_{44} \sigma_{12} \sin 2\beta] dx'_2. \quad (10)$$

Для определения напряжений в поперечном сечении монокристалла нужно для нескольких направлений просвечивания измерить распределение разности хода  $\delta(x'_1)$  по координате  $x'_1$ , перпендикулярной к направлению просвечивания.

Искомые компоненты напряжения аппроксимируются степенными или тригонометрическими рядами, а интегрирование правой части уравнения (10) дает линейные соотношения между неизвестными коэффициентами, определяющими распределения компонентов напряжения, с одной стороны, и экспериментально определенными суммарными разностями хода — с другой. Целесообразно направления просвечивания выбирать параллельно кристаллографическим направлениям типа [010] и [110], так как в первом случае касательные напряжения в плоскости исследуемого сечения не влияют на суммарную разность хода, а во втором случае оказывают на нее наиболее сильное воздействие.

Методика исследования напряжения в кубических монокристаллах призматической формы квадратного поперечного сечения и цилиндрической формы кругового поперечного сечения методом интегральной фотоупругости здесь не рассматривается.

При наличии осевого градиента напряжений компоненты напряжения  $\sigma_{31}$  и  $\sigma_{23}$  отличаются от нуля и, следовательно, на пути светового луча может иметь место вращение квазиглавных направлений, т. е. интегральный закон Вертгейма здесь недействителен. Для анализа этого случая представим трехмерную фотоупругую модель как стопу из  $n$  поставленных друг за другом двупреломляющих пластинок. Матрицу  $U_j$ , описывающую преобразование параметров светового эллипса в одной двупреломляющей пластинке  $j$ , можно выразить в виде [23]

$$U_j = \cos \frac{\gamma_j}{2} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \cos 2\varphi_j & \sin 2\varphi_j \\ \sin 2\varphi_j & -\cos 2\varphi_j \end{pmatrix} \operatorname{tg} \frac{\gamma_j}{2} \right], \quad (11)$$

где  $\gamma_j$  — разность фаз в пластинке, которая связана с разностью хода  $\delta_j$  в этой же пластинке соотношением

$$\gamma_j = \frac{360}{\lambda} \delta_j,$$

$\lambda$  — длина волны. Матрица всей стопы  $U$  определяется соотношением

$$U = \prod_{j=1}^n U_j. \quad (12)$$

При малой толщине  $\Delta x'_{2j}$  каждой пластинки  $\operatorname{tg} \frac{\gamma_j}{2} \approx \frac{\gamma_j}{2}$ ,  $\cos \frac{\gamma_j}{2} \approx 1$ , и уравнение (12) можно переписать в виде [23]

$$U = \prod_{j=1}^n \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{180}{\lambda} i \begin{pmatrix} \delta_j \cos 2\varphi_j & \delta_j \sin 2\varphi_j \\ \delta_j \sin 2\varphi_j & -\delta_j \cos 2\varphi_j \end{pmatrix} \right]. \quad (13)$$

Если в произведении (13) отбросить члены, содержащие  $\delta_j$  выше, чем в первой степени, и перейти к предельному случаю  $n \rightarrow \infty$ , то с учетом соотношений (4) — (7) и (13) получим матрицу  $U$  в виде

$$U = \begin{pmatrix} 1+iP & iQ \\ iQ & 1-iP \end{pmatrix}, \quad (14)$$

где

$$P = \frac{180}{\lambda} \int p \, dx'_2, \quad (15)$$

$$Q = \frac{180}{\lambda} \int q \, dx'_2. \quad (16)$$

Параметр оптической изоклины  $\varphi$  и суммарная разность хода  $\delta$  при малом вращении квазиглавных направлений диэлектрического тензора связаны с компонентами напряжения соотношениями

$$\delta = \frac{\lambda}{180} \sqrt{P^2 + Q^2}, \quad (17)$$

и

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{Q}{P}, \quad (18)$$

которые можно представить также в виде

$$\delta \cos 2\varphi = \frac{\lambda}{180} P, \quad (19)$$

$$\delta \sin 2\varphi = \frac{\lambda}{180} Q. \quad (20)$$

В правые части уравнений (19) и (20) входят компоненты напряжения, проинтегрированные отдельно по световому лучу. Это позволяет при наличии осевого градиента напряжений решать задачу такими же математическими приемами, как и в случае его отсутствия.

Следует отметить, что если цифровые значения пьзооптических коэффициентов  $\pi_{11}$  —  $\pi_{12}$  и  $\pi_{44}$  значительно отличаются друг от друга, сильному вращению квазиглавных напряжений может соответствовать малое вращение квазиглавных направлений диэлектрического тензора.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Инденбом В. Л., Житомирский И. С., Чебанова Т. С., Кристаллография, **18**, 39 (1973).
2. Инденбом В. Л., Изв. АН СССР, Сер. физ. **37**, 2258 (1973).
3. Шашков Ю. М., Силкин В. Б., Блецкан Н. И., Изв. АН СССР, Сер. физ., **37**, 2458 (1973).
4. Резников Б. А., ФТТ, **5**, 2526 (1963).
5. Pockels, F., Lehrbuch der Kristalloptik, Leipzig u. Berlin, 1906.
6. Mueller, H., Phys. Rev., **47**, 947 (1935).
7. Краснов В. М., Уч. зап. ЛГУ, № 87, 97 (1944).
8. Goodman, L. E., Sutherland, J. G., J. Appl. Phys., **24**, 577 (1953).
9. Бугаков И. И., Грах И. И., Вестник ЛГУ, **19**, 102 (1968).
10. Бугаков И. И., Грах И. И., Конакова Н. С., Тр. VII Всес. конф. по поляризационно-оптическому методу исследования напряжений, **4**, Таллин, 1971, с. 124.
11. Zapletal, A., Stavebn. Casop., **21**, 817 (1973).
12. Bhagavantam, S., Proc. Indian Acad. Sci., **A16**, 359 (1942).
13. Най Дж., Физические свойства кристаллов, М., 1960.
14. Никитенко В. И., Мартыненко Г. П., ФТТ, **7**, 622 (1965).
15. Wardzynski, W., Sol. State Phys., **3**, 1251 (1970).
16. Кулаковский В. Д., Кулаков М. П., Кристаллография, **20**, 1072 (1975).
17. Инденбом В. Л., Никитенко В. И., Напряжения и дислокации в полупроводниках, М., 1962, с. 8.
18. Hornstra, J., Penning, P., Philips Res. Repts, **14**, 237 (1959).
19. Никитенко В. И., Инденбом В. Л., Кристаллография, **6**, 432 (1961).
20. Григорян А. Х., Докл. АН Арм. ССР, **48**, 90 (1974).
21. Чернышева М. А., Методы и приборы для контроля качества кристаллов рубина, М., 1968, с. 78.
22. Абен Х. К., Интегральная фотоупругость, Таллин, 1975.
23. Тронько В. Д., Головач Г. И., Кристаллография, **18**, 459 (1973).

Институт кибернетики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
8/X 1976

E. BROSMAN

# KUUBILISTE MONOKRISTALLIDE INTEGRAALSEST FOTOELASTSUSEST

Tuletatakse seosed integraalsete polarisatsioonoptiliste nähtuste ja kolmemõõtmeliste pingeкомпонентide vahel kuubilistes 43m, 432 ja m3m klassi monokristallides tasan-dis (001) ning analüüsitakse seoste lihtsustamise võimalust kvaasipeasuundade nõrgal pöördumisel valguskiirel.

E. BROSMAN

# ON THE APPLICATION OF INTEGRATED PHOTOELASTICITY OF SINGLE CUBIC CRYSTALS

The relations between integrated photoelastic phenomena and the three-dimensional stress components in the single cubic crystals of 43m, 432 and m3m classes in the plane (001) are derived. The possibility of simplification of the relations in the case of weak rotation of the quasi-principal axes is analyzed.