

<https://doi.org/10.3176/phys.math.1977.4.13>

УДК 532.529

В. ВАНАТОА, М. ЛААТС,  
 А. КАРТУШИНСКИЙ, Ф. ФРИШМАН

### ИНТЕГРАЛЬНЫЙ МЕТОД РАСЧЕТА ДВУХФАЗНОЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ СТРУИ

В известной работе С. Патанкара и Д. Сполдинга [1] теории однофазного пограничного слоя делятся на полные и явно интегральные. Характеристиками первых являются полуэмпирические гипотезы для турбулентной вязкости и численные методы решений дифференциальных уравнений в частных производных переноса различных субстанций, а характеристиками вторых — эмпирические соотношения, связывающие интегральные параметры слоя, и численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих интегральные свойства пограничного слоя. Конечно, полные теории предпочтительнее, однако в тех случаях, когда численное решение уравнений в частных производных затруднительно, в явно интегральных методах можно использовать соотношения, содержащие турбулентные касательные напряжения и такие же полуэмпирические гипотезы, как и в полных теориях. Это делает интегральные методы более обоснованными.

Интегральные соотношения получают путем интегрирования исходных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} y^e \rho \alpha U_s^2 + \frac{\partial}{\partial x} y^e \rho U^2 + \frac{\partial}{\partial y} y^e \rho \alpha U_s V_s + \frac{\partial}{\partial y} y^e \rho UV = \\ & = - \frac{\partial}{\partial y} y^e \rho u' v' - \frac{\partial}{\partial y} y^e \rho \alpha u'_s v'_s - \frac{\partial}{\partial y} y^e \rho \alpha' v'_s U_s, \\ & \frac{\partial}{\partial x} y^e \rho \alpha U_s^2 + \frac{\partial}{\partial y} y^e \rho \alpha U_s V_s = - \frac{\partial}{\partial y} y^e \rho \alpha u'_s v'_s - \frac{\partial}{\partial y} y^e \rho \alpha' v'_s U_s \pm \frac{\rho \alpha}{m_p} f, \\ & \frac{\partial}{\partial x} y^e \rho \alpha U_s + \frac{\partial}{\partial y} y^e \rho \alpha V_s = - \frac{\partial}{\partial y} y^e \rho \alpha' v'_s. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $U, U_s, V, V_s$  — продольные и поперечные составляющие скоростей газа и примеси соответственно,  $\rho$  — плотность несущей фазы,  $\alpha$  — массовая концентрация примеси,  $\varepsilon = 1$  для осесимметричного течения,  $\varepsilon = 0$  для плоскопараллельного течения,  $m_p$  — масса частицы.

После интегрирования имеем

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho \alpha U_s^2 y^e dy + \frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho U^2 y^e dy = 0,$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho \alpha U_s^2 y^e dy = \pm \int_0^{\infty} \frac{\rho \alpha}{m_p} f dy, \quad (2)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^{\infty} \rho \alpha U_s y^e dy = 0.$$

Здесь  $f$  — сила сопротивления движению частицы.

Для определения  $f$  удобно использовать данные [2]

$$f = \frac{24}{\text{Re}} L \frac{\pi \delta^2 \rho (U - U_s)^2}{4 \cdot 2}, \quad (3)$$

$$L = 1 + 0,15 \text{Re}^{0,687},$$

где  $\delta$  — диаметр частицы.

Соотношения, содержащие турбулентную вязкость, обычно получаются путем умножения уравнений (1) на скорость (соотношения Голубева) или радиус (соотношения Лойцянского) в степени 1, 2, 3 и последующего интегрирования. Система уравнений Голубева использована в [3] для расчета двухфазных равновесных турбулентных течений и в [4] для расчета неравновесных течений. Уравнения в [4] отличаются не только сложностью. Они содержат в правой части под интегралом неавтономные члены, что исключает возможность получения аналитического решения и существенно усложняет численное решение.

Система интегральных соотношений выглядит гораздо проще, если уравнения типа (2) использовать до какой-либо характерной линии струи. Если эта линия не граница, в уравнения войдут и турбулентные касательные напряжения. Такие методы использовались для расчета однородных струйных течений [5]. Однако существенных преимуществ не давали, так как для таких течений соотношения Голубева и Лойцянского тоже достаточно просты.

Рассмотрим для примера основной участок осесимметричной турбулентной струи. Уравнение, содержащее турбулентные касательные напряжения, получается при интегрировании уравнения (1) до линии, на которой  $\alpha = 0,5 \alpha_m$  (индекс  $m$  обозначает осевые значения)

$$\frac{d}{dx} \int_0^{r_\alpha} \rho U^2 y^e dy + \frac{d}{dx} \int_0^{r_\alpha} \rho \alpha U_s^2 y^e dy - U_{0,5} \frac{d}{dx} \int_0^{r_\alpha} \rho U y^e dy -$$

$$- U_{0,5} \frac{d}{dx} \int_0^{r_\alpha} \rho \alpha U_s y^e dy = k_Q U_m r_u r_\alpha \frac{1 + 0,5n^2 \alpha_m}{1 + 0,5 \alpha_m} \left. \frac{dU}{dy} \right|_{r_\alpha}. \quad (4)$$

Здесь  $r_u, r_\alpha$  — значения радиусов, где скорость и концентрация равны половине осевых значений; коэффициент турбулентной вязкости принят, согласно теории Прандтля, равным  $k U_m r_u$ , а влияние примеси на турбулентность определено по теории Абрамовича [6];  $n$  — параметр, характеризующий относительную скорость частиц в турбулентном моле.

Приведем уравнение (4) к безразмерному виду для  $\varepsilon = 1$ :

$$\frac{d}{dx} \rho U_m^2 r_u^2 \int_0^{r_\alpha/r_u} \left( \frac{U}{U_m} \right)^2 \frac{y}{r_u} \frac{dy}{r_u} + \frac{d}{dx} \rho \alpha_m U_{sm}^2 r_\alpha^2 \int_0^1 \left( \frac{U_s}{U_{sm}} \right)^2 \frac{\alpha}{\alpha_m} \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} -$$

$$= k_Q U_m r_u r_\alpha \frac{1 + 0,5n^2 \alpha_m}{1 + 0,5 \alpha_m} \left. \frac{dU}{dy} \right|_{r_\alpha} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 & -U_{0,5} \frac{d}{dx} \varrho U_m r_\alpha^2 \int_0^1 \frac{U}{U_m} \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} - U_{s0,5} \frac{d}{dx} \varrho \alpha_m U_{sm} r_\alpha^2 \times \\
 & \times \int_0^1 \frac{\alpha}{\alpha_m} \frac{U_s}{U_{sm}} \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = k \varrho U_m^2 r_\alpha \frac{1+0,5n^2\alpha_m}{1+0,5\alpha_m} \left. \frac{dU/U_m}{dy/r_\alpha} \right|_{0,5}.
 \end{aligned}$$

Аналогично приводятся к безразмерному виду уравнения (2):

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dx} \varrho U_m^2 r_\alpha^2 \int_0^\infty \left( \frac{U}{U_m} \right)^2 \frac{y}{r_u} \frac{dy}{r_u} + \frac{d}{dx} \varrho \alpha_m U_{sm}^2 r_\alpha^2 \int_0^\infty \left( \frac{U_s}{U_{sm}} \right)^2 \frac{\alpha}{\alpha_m} \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = 0, \\
 & \frac{d}{dx} \varrho U_{sm}^2 \alpha_m r_\alpha^2 \int_0^\infty \left( \frac{U_s}{U_{sm}} \right)^2 \frac{\alpha}{\alpha_m} \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = 18L \varrho \frac{\nu}{\delta^2} \frac{\varrho}{\varrho_s} \alpha_m \times \\
 & \times \left( U_m r_\alpha^2 \int_0^\infty \frac{U}{U_m} \frac{\alpha}{\alpha_m} \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} - U_{sm} r_\alpha^2 \int_0^\infty \frac{U_s}{U_{sm}} \frac{\alpha}{\alpha_m} \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} \right), \\
 & \frac{d}{dx} \varrho \alpha_m U_{sm} r_\alpha^2 \int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha_m} \frac{U_s}{U_{sm}} \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = 0.
 \end{aligned} \tag{6}$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha_m} \frac{U_s}{U_{sm}} \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = A; & \int_0^\infty \left( \frac{U}{U_m} \right)^2 \frac{y}{r_u} \frac{dy}{r_u} = B; \\
 & \int_0^\infty \left( \frac{U_s}{U_{sm}} \right)^2 \frac{\alpha}{\alpha_m} \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = B_s; & \int_0^1 \frac{U}{U_m} \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = A_i; \\
 & \int_0^{r_\alpha/r_u} \left( \frac{U}{U_m} \right)^2 \frac{y}{r_u} \frac{dy}{r_u} = B_i; & \int_0^1 \left( \frac{U_s}{U_{sm}} \right)^2 \frac{\alpha}{\alpha_m} \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = B_{s1}; \\
 & \int_0^\infty \frac{\alpha}{\alpha_m} \frac{U}{U_m} \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = F.
 \end{aligned} \tag{7}$$

Особенность интегральных методов заключается в том, что необходимые для определения  $A_i$ ,  $B_i$  и  $F$  функции распределения параметров в поперечном сечении задаются заранее чаще на основании опытных данных, иногда в результате интегрирования дифференциальных уравнений для течений, близких по типу к исследуемому. Такой подход оправдан потому, что для автоматических течений, к каковым на достаточном удалении от сопла относится струя, интегралы  $A_i$  и  $B_i$ , как правило, являются константами, значения которых мало зависят от вида функции распределения.

Зададим функции распределения в виде

$$\frac{D}{D_m} = \exp \left[ -0,7 \left( \frac{r}{r_{0,5D}} \right)^{n_D} \right]. \quad (8)$$

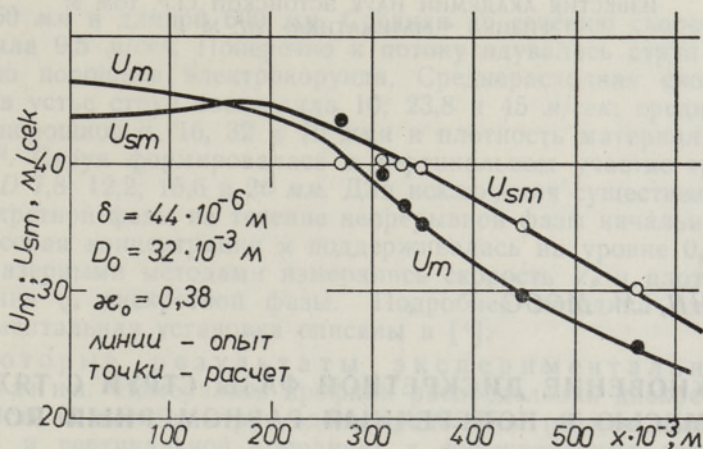
Опыты показали, что на основном участке струи с точностью, достаточной для практических расчетов,  $n_u = 1,75$ ,  $n_\alpha = 1,33$ ,  $n_s = 2$ . Отсюда

$$\begin{aligned} A &= \int_0^\infty \exp \left[ -0,7 \left( \frac{r}{r_\alpha} \right)^{1,33} - 0,7 \left( \frac{r}{r_\alpha} \right)^2 \left( \frac{r_\alpha}{r_{us}} \right)^2 \right] \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = 0,83, \\ B &= \int_0^\infty \exp \left[ -1,4 \left( \frac{r}{r_u} \right)^{1,75} \right] \frac{y}{r_u} \frac{dy}{r_u} = 0,368, \\ A_1 &= \int_0^1 \exp \left[ -0,7 \left( \frac{r}{r_u} \right)^{1,75} \left( \frac{r_u}{r_\alpha} \right)^{1,75} \right] \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = 0,0715, \\ B_s &= \int_0^\infty \exp \left[ -0,7 \left( \frac{r}{r_\alpha} \right)^{1,33} - 1,4 \left( \frac{r}{r_\alpha} \right)^2 \left( \frac{r_\alpha}{r_{us}} \right)^2 \right] \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = 0,661, \\ B_1 &= \int_0^{r_\alpha/r_u} \exp \left[ -1,4 \left( \frac{r}{r_u} \right)^{1,75} \right] \frac{y}{r_u} \frac{dy}{r_u} = 0,0667, \\ B_{st} &= \int_0^1 \exp \left[ -0,7 \left( \frac{r}{r_\alpha} \right)^{1,33} - 1,4 \left( \frac{r}{r_\alpha} \right)^2 \left( \frac{r_\alpha}{r_{us}} \right)^2 \right] \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = 0,296, \\ F &= \int_0^\infty \exp \left[ -0,7 \left( \frac{r}{r_\alpha} \right)^{1,33} - 0,7 \left( \frac{r}{r_u} \right)^{1,75} \left( \frac{r_u}{r_\alpha} \right)^{1,75} \right] \frac{y}{r_\alpha} \frac{dy}{r_\alpha} = 0,812. \end{aligned} \quad (9)$$

После подстановки соотношений (9) в уравнения (5) и (6) и вычислений имеем окончательно

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \rho a_m U_{sm} r_u^2 &= 0, \\ \frac{d}{dx} a_m U_{sm}^2 r_u^2 + 3,48 \frac{d}{dx} U_m^2 r_u^2 &= 0, \\ \frac{d}{dx} a_m U_{sm}^2 r_u^2 &= \frac{3,1 \cdot 10^{-2} v}{\delta^2} L r_u^2 a_m [U_m - 1,02 U_{sm}], \\ \frac{d}{dx} a_m U_{sm}^2 r_u^2 + 1,405 \frac{d}{dx} r_u^2 U_m^2 - 1,31 U_m \frac{d}{dx} U_m r_u^2 &= \\ &= -0,104 r_u U_m^2 \frac{1 + n^2 0,5 a_m}{1 + 0,5 a_m}. \end{aligned} \quad (10)$$

На рисунке сопоставлены результаты расчета по уравнениям (10) с экспериментом. Кривые совмещались в сечении  $x = 350 \text{ мм}$  ( $x/d_0 \approx 11$ ), где по данным эксперимента начинается подобие. Удовлетворительное совпадение получено при  $k = 0,022$  и силе сопротивления в два раза большей, чем следует из формулы (3). Несколько меньшие значе-



ния  $k$  для струй с трубным профилем, по сравнению со струями с равномерным начальным профилем, общеизвестны и получены при исследовании однофазных струй. Существенное увеличение коэффициента сопротивления частиц можно объяснить их неправильной формой и вращением. Расчеты по формулам (10) требуют на машине «Наири» в 10 раз меньше времени, чем по формулам [4].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Патанкар С., Сполдинг Д., Тепло- и массообмен в пограничных слоях, М., 1971, с. 127.
2. Гродзовский Г. Л., Уч. зап. ЦАГИ, V, № 2, 80 (1974).
3. Абрамович Г. Н., Бажанов В. И., Гиршович Т. А., Изв. АН СССР, МЖГ, № 5, 41 (1972).
4. Лаатс М. К., Розенштейн А. З., Фришман Ф. А., В кн.: Турбулентные двухфазные течения, Таллин, 1976.
5. Гиневский А. С., Теория турбулентных струй и следов, М., 1969, с. 400.
6. Абрамович Г. Н., Докл. АН СССР, 190, № 5, 1052 (1970).

Институт термодинамики и электрофизики  
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию  
3/XI 1976

V. VANATOJA, M. LAATS, A. KARTUSINSKI, F. FRISHMAN

#### TASAKAALUSTAMATU VABA HIIBSE VOOLUSE ARVUTAMISE INTEGRAALMEETOD

Esitatakse mehaaniliselt tasakaalustamatu vaba hiibse (gaas — tahked osakesed) vooluse arvutus. Seejuures on kasutatud iselaadset integraalsete seoste meetodit, kus summaarse liikumishulga võrrandid kehtivad ka mingi vooluse osa jaoks. Arvutuse tulemused on kõrvutatud katsetulemustega.

V. VANATOJA, M. LAATS, A. KARTUSHINSKI, F. FRISHMAN

#### AN INTEGRAL METHOD FOR CALCULATING AN AXISYMMETRICAL TWO-PHASE JET

Solution of the problem of the developed zone of nonequilibrium axisymmetric turbulent jet containing fine solid admixture is presented. Integral equations of mass of admixture, momentum of solid phase and summary momentum are used. The latter is presented not only for the whole space but also for the line of half-level of the concentration. Results of calculations are compared with experimental results of other authors.