EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED, 26. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1977, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 26
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1977, № 4

УДК 519.3:62-50

С. УЛЬМ

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ПРИНЦИПА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Для решения задач нелинейного планирования устанавливается связь между принципом прогнозирования взаимодействий [1] и методом декомпозиции, основанным на частичной линеаризации подсистем [2]. Этот принцип применяется для декомпозиции одной экономической модели, изученной Т. Кронше [3, 4]. При этом координируемость рассматриваемых задач доказывается на основании необходимых и достаточных условий минимума. По содержанию настоящая работа примыкает к статье [5].

1. Представим задачу нелинейного планирования в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \min_{x \in X}, \tag{1}$$

где

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n, \tag{2}$$

т. е. $x_i \in X_i$; $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in_i})$ — в общем векторы.

Разложим задачу (1)—(2) некоторым образом на подзадачи

$$f_i(x_i, \alpha_i) \to \min_{x_i \in X_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{3}$$

При фиксированном α_i обозначим решение (не обязательно единственное) i-й подзадачи (3) через $x_i(\alpha_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Задача второго уровня (центра) состоит в нахождении координирующих входов $\hat{\alpha}_i$ таких, чтобы

$$x_i(\hat{\alpha}_i) = \hat{x}_i \quad (i=1, \ldots, n), \tag{4}$$

где $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ — решение задачи (1)—(2).

Для осуществления процесса координации введем (ср. [1, 5]) т. н. функции взаимодействия $K_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$, связывающие подзадачи (3) с общей задачей (1)—(2). Пусть $\{\alpha_i\} = K_i(X)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Для каждого α можно вычислить значения $K_i(x(\alpha))$, где $x(\alpha) = (x_1(\alpha_1), \ldots, x_n(\alpha_n))$ — некоторый вектор решения подзадач.

Будем говорить (ср. [1, 5]), что при выбранных $f_i(x_i, \alpha_i)$ и $K_i(x)$

а) к задаче (1)—(2) применим принцип прогнозирования взаимодействий, если из предположения выполнения равенств

$$\alpha_i = K_i(x(\alpha)) \quad (i=1, \ldots, n) \tag{5}$$

следует

$$x(\alpha) = \hat{x}; \tag{6}$$

б) задача (1)—(2) координируема с помощью принципа прогнозирования взаимодействий, если этот принцип применим и существуют α_i такие, при которых равенства (5) выполняются.

2. Пусть целевая функция (1) дана в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i) + g(x_1, \ldots, x_n). \tag{7}$$

Допустим, что функции $g(x)$ и $g_i(x_i)$ выпуклы и дифференцируемы, а множества X_i — выпуклые компакты $(i = 1, \ldots, n)$.

Выберем *

$$f_i(x_i, \alpha_i) = g_i(x_i) + \langle \alpha_i, x_i \rangle \tag{8}$$

и

$$K_i(x) = \frac{\partial g(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{9}$$

Тогда условия координации (5) примут вид

$$\alpha_i = \frac{\partial g(x_1(\alpha_1), \ldots, x_n(\alpha_n))}{\partial x_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{10}$$

Покажем, что при выбранных $f_i(x_i, \alpha_i)$ и $K_i(x)$ задача (1)—(2) с целевой функцией (7) координируема с помощью принципа прогнозирования взаимодействий.

А. Применимость принципа. Допустим, что условия координации (10) при некотором значении α выполнены. Тогда на основании необходимых и достаточных условий минимума (см., напр., [6]) для подзадач справедливо

$$\left\langle \frac{\partial g_i(x_i(\alpha_i))}{\partial x_i} + \frac{\partial g(x_1(\alpha_1), \ldots, x_n(\alpha_n))}{\partial x_i}, \; x_i - x_i(\alpha_i) \right\rangle \geqslant 0 \tag{11}$$

для каждого $x_i \in X_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Суммируя эти неравенства, получим

$$\langle \operatorname{grad} f(x(\alpha)), \; x - x(\alpha) \rangle \geqslant 0 \tag{12}$$

для каждого $x \in X$, т. е. необходимые и достаточные условия минимума для нашей задачи выполнены. Итак, из равенств (5) следует формула (6).

Б. Координируемость. Покажем, что система (10) имеет решение. Допустим, что решением ее является

$$\alpha_i = \hat{\alpha}_i = \frac{\partial g(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)}{\partial x_i} \quad (i=1, \ldots, n). \tag{13}$$

Это значит, что решением подзадачи

$$f_i(x_i, \hat{\alpha}_i) = g_i(x_i) + \left\langle \frac{\partial g(\hat{x}_1, \ldots \hat{x}_n)}{\partial x_i}, x_i \right\rangle \to \min_{x_i \in X_i} \tag{14}$$

* Символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает скалярное произведение.

является

$$x_i(\hat{\alpha}_i)=\hat{x}_i \quad (i=1, \ldots, n). \tag{15}$$

При нашем допущении и на основании необходимых и достаточных условий минимума должны быть справедливыми неравенства

$$\left\langle \frac{\partial g_i(\hat{x}_i)}{\partial x_i}+\frac{\partial g(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)}{\partial x_i}, x_i-\hat{x}_i \right\rangle \geqslant 0 \tag{16}$$

$$(x_i \in X_i;\ i=1, \ldots, n).$$

Это действительно так, поскольку на основании условий минимума для рассматриваемой задачи

$$\sum_{i=1}^{n}\left\langle \frac{\partial g_i(\hat{x}_i)}{\partial x_i}+\frac{\partial g(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)}{\partial x_i}, x_i-\hat{x}_i \right\rangle \geqslant 0 \tag{17}$$

$$(x_i \in X_i;\ i=1, \ldots, n),$$

откуда следует выполняемость (16) для каждого $i=1, \ldots, n$. Допустим противное. Пусть по крайней мере для одного i, например, для $i=k$, существует точка $\tilde{x}_k \in X_k$ такая, что

$$\left\langle \frac{\partial g(\hat{x}_k)}{\partial x_k}+\frac{\partial g(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)}{\partial x_k}, \tilde{x}_k-\bar{x}_k \right\rangle < 0. \tag{18}$$

Рассмотрим точку

$$\tilde{x}=(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_{k-1}, \tilde{x}_k, \hat{x}_{k+1}, \ldots, \hat{x}_n) \in X.$$

Тогда, очевидно, $\langle \operatorname{grad} f(\hat{x}_k), \tilde{x}-\hat{x}\rangle < 0$, т. е. $\tilde{x}$ не удовлетворяет условиям (17). Мы получили противоречие. Итак, система (10) имеет решение и наша задача является координируемой.

Замечание. Аналогичный метод декомпозиции (без ограничения $x \in X$), но с другой точки зрения, был представлен в [2]. Там же был разработан и некоторый алгоритм для координации, т. е. для решения системы (10). Вышеизложенное показывает, что этот метод декомпозиции можно интерпретировать как пример применения принципа прогнозирования взаимодействий.

3. Рассмотрим применение этого принципа для декомпозиции одной экономической модели, исследованной другими способами Т. Кронше [3, 4] **:

$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} f_i(x_i) \to \min, \\ &g_i(x_0)+h_i(x_i) \leqslant b_i \quad (i=1, \ldots, n), \\ &x_i \in X_i \quad (i=0, \ldots, n). \end{aligned} \tag{19}$$

Выберем

$$K_i(x)=h_i(x_i) \qquad (i=1, \ldots, n)$$

и построим подзадачи следующим образом.

** В [3, 4] можно найти и экономическую интерпретацию модели (19).

1-я подзадача:

$$\begin{aligned} &f_0(x_0)\to\min,\\ &g_i(x_0)+\alpha_i\leqslant b_i \quad (i=1,\ldots,n),\\ &x_0\in X_0;\end{aligned} \tag{20}$$

i-я подзадача $(i=2, \ldots, n+1)$:

$$\begin{aligned} &f_{i-1}(x_{i-1})+\beta_{i-1}h_{i-1}(x_{i-1})\to\min,\\ &x_{i-1}\in X_{i-1}.\end{aligned} \tag{21}$$

Координирующими входами второго уровня являются $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ (при этом с помощью величин $\beta_i\geqslant 0$ модифицируются целевые функции подсистем). Предположим, что f_i, g_i, h_i — выпуклые функции, X_i — выпуклые компакты, а x_i — в общем векторы. Допустим также, что для глобальной задачи (19) и для 1-й подзадачи (при интересующих нас значениях α_i) условие Слейтера выполняется. Обозначим решение 1-й подзадачи через $x_0(\alpha)$, соответствующие множители Лагранжа через $\lambda_i(\alpha)$ $(i=1, \ldots, n)$ и решение i-й подзадачи через $x_{i-1}(\beta_{i-1})$ $(i=2, \ldots, n+1)$. Оказывается, что условия координации выражаются в виде

$$\begin{aligned} &\alpha_i=h_i(x_i(\beta_i)),\\ &\beta_i=\lambda_i(\alpha)\\ &(i=1, \ldots, n).\end{aligned} \tag{22}$$

4. Покажем, что при сделанных предположениях задача (19) координируема с помощью принципа прогнозирования взаимодействий.

А. Применимость принципа. При наших предположениях задача (19) и подзадачи (20), (21) имеют решение, причем для задач (19) и (20) необходимым и достаточным условием оптимальности является существование седловой точки у соответствующих функций Лагранжа. Допустим, что существуют $\bar\alpha$ и $\bar\beta$ такие, что условия (22) выполняются. Покажем, что тогда $\bar x=(x_0(\bar\alpha), x_1(\bar\beta_1), \ldots, x_n(\bar\beta_n))=$ $=(\bar x_0, \ldots, \bar x_n)$ и $\bar\lambda=(\lambda_1(\bar\alpha), \ldots, \lambda_n(\bar\alpha))=(\bar\lambda_1, \ldots, \bar\lambda_n)$ являются соответственно решением задачи (19) и вектором множителей Лагранжа.

Условия седловой точки для 1-й подзадачи при $\bar\alpha_i=h_i(\bar x_i)$ и $\bar\beta_i=\bar\lambda_i$ выражаются в виде

$$\begin{aligned} &f_0(\bar x_0)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g_i(\bar x_0)+h_i(\bar x_i)-b_i)\leqslant\\ &\leqslant f_0(\bar x_0)+\sum_{i=1}^{n}\bar\lambda_i(g_i(\bar x_0)+h_i(\bar x_i)-b_i)\leqslant\\ &\leqslant f_0(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\bar\lambda_i(g_i(x_0)+h_i(\bar x_i)-b_i)\\ &(x_0\in X_0;\ \lambda_i\geqslant 0,\ i=1, \ldots, n).\end{aligned} \tag{23}$$

Условия оптимальности для i-й подзадачи при $\beta_{i-1}=\bar\lambda_{i-1}$ $(i=2, \ldots, n+1)$:

$$f_{i-1}(\bar x_{i-1})+\bar\lambda_{i-1}h_{i-1}(\bar x_{i-1})\leqslant f_{i-1}(x_{i-1})+\bar\lambda_{i-1}h_{i-1}(x_{i-1}) \tag{24}$$
$$(x_{i-1}\in X_{i-1}),$$

Из этих неравенств с помощью суммирования получим:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(\bar{x}_i)+\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(g_i(\bar{x}_0)+h_i(\bar{x}_i)-b_i)\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n} f_i(\bar{x}_i)+\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i(g_i(\bar{x}_0)+h_i(\bar{x}_i)-b_i)\leqslant \tag{25}$$

$$\leqslant \sum_{i=0}^{n} f_i(x_i)+\sum_{i=1}^{n} \bar{\lambda}_i(g_i(x_0)+h_i(x_i)-b_i)$$

$$(x_i\in X_i,\ i=0,\ \ldots,\ n;\ \lambda_i\geqslant 0,\ i=1,\ \ldots,\ n).$$

Условия (25) являются условиями седловой точки для задачи (19). Следовательно, $\bar{x}$ есть решение задачи (19), а $\bar{\lambda}$ — соответствующий вектор множителей Лагранжа. Итак, принцип прогнозирования взаимодействий применим.

Б. Координируемость. Покажем, что система (22) имеет решение. Пусть $\hat{x}$ — решение задачи (19), а $\hat{\lambda}$ — соответствующий вектор множителей Лагранжа. Тогда при $\bar{x}=\hat{x}$, $\bar{\lambda}=\hat{\lambda}$ неравенства (25) выполняются. Выберем

$$\alpha_i=h_i(\hat{x}_i),$$
$$\beta_i=\hat{\lambda}_i \tag{26}$$
$$(i=1,\ \ldots,\ n).$$

Тогда подзадачи примут следующий вид.

1-я подзадача:

$$f_0(x_0)\to\min,$$
$$g_i(x_0)+h_i(\hat{x}_i)\leqslant b_i \quad (i=1,\ \ldots,\ n) \tag{27}$$
$$x_0\in X_0,$$

i-я подзадача $(i=2,\ \ldots,\ n+1)$:

$$f_{i-1}(x_{i-1})+\hat{\lambda}_{i-1}h_{i-1}(x_{i-1})\to\min,$$
$$x_{i-1}\in X_{i-1}. \tag{28}$$

Мы должны показать, что решением 1-й подзадачи является $\hat{x}_0$, соответствующим вектором множителей Лагранжа — $\hat{\lambda}$ и решением i-й подзадачи — $\hat{x}_{i-1}$ $(i=2,\ \ldots,\ n+1)$. Тогда для 1-й подзадачи должны иметь место следующие условия седловой точки:

$$f_0(\hat{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(g_i(\hat{x}_0)+h_i(\hat{x}_i)-b_i)\leqslant$$

$$\leqslant f_0(\hat{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i(g_i(\hat{x}_0)+h_i(\hat{x}_i)-b_i)\leqslant \tag{29}$$

$$\leqslant f_0(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i(g_i(x_0)+h_i(x_i)-b_i)$$

$$(x_0\in X_0;\ \lambda_i\geqslant 0,\ i=1,\ \ldots,\ n).$$

Первое из неравенств (29) выполняется, поскольку $\hat{\lambda}_i(g_i(\hat{x}_0)+ h_i(\hat{x}_i)-b_i)=0$ и $\lambda_i(g_i(\hat{x}_0)+h_i(\hat{x}_i)-b_i)\leqslant 0$ $(\lambda_i\geqslant 0)$. Рассмотрим второе неравенство, которое можно представить в виде

$$f_0(\hat{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}_0)\leqslant f_0(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i g_i(x_0) \tag{30}$$

$$(x_0\in X_0).$$

Вместе с неравенством (30) рассмотрим неравенства, которые должны иметь место для остальных подсистем:

$$f_i(\hat{x}_i)+\hat{\lambda}_i h_i(\hat{x}_i)\leqslant f_i(x_i)+\hat{\lambda}_i h_i(x_i) \tag{31}$$

$$(i=1,\ \ldots,\ n).$$

Выполняемость неравенств (30) и (31) следует из условий (25), где $\bar{x}=\hat{x}$ и $\bar{\lambda}=\hat{\lambda}$. На основании последних

$$\sum_{i=0}^{n} f_i(\hat{x}_i)+\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i h_i(\hat{x}_i)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=0}^{n} f_i(x_i)+\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i g_i(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i h_i(x_i) \tag{32}$$

$$(x_i\in X_i;\ \ i=0,\ \ldots,\ n).$$

Действительно, допустим, что существует точка $\tilde{x}_0\in X_0$ такая, что

$$f_0(\tilde{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i g_i(\tilde{x}_0)<f_0(\hat{x}_0)+\sum_{i=1}^{n}\hat{\lambda}_i g_i(\hat{x}_0). \tag{33}$$

Тогда точка $(\tilde{x}_0,\ \hat{x}_1,\ \ldots,\ \hat{x}_n)\in X=X_0\times\ldots\times X_n$ не удовлетворяет условиям (32), т. е. мы получили противоречие. Если положить, что при $1\leqslant i=k\leqslant n$ существует точка $\tilde{x}_k\in X_k$ такая, что

$$f_k(\tilde{x}_k)+\hat{\lambda}_k h_k(\tilde{x}_k)<f_k(\hat{x}_k)+\hat{\lambda}_k h_k(\hat{x}_k), \tag{34}$$

то точка $(\hat{x}_0,\ \ldots,\ \hat{x}_{k-1},\ \tilde{x}_k,\ \hat{x}_{k+1},\ \ldots,\ \hat{x}_n)\in X$ не удовлетворяет условиям (32), т. е. мы опять получили противоречие. Следовательно, выполняются и неравенства (30), (31). Итак, задача (19) является координируемой.

5. Аналогичным образом можно доказать координируемость задачи (19) с помощью принципа прогнозирования взаимодействий, если выбрать

$$K_i(x)=g_i(x_0)\qquad(i=1,\ \ldots,\ n) \tag{35}$$

и построить подзадачи следующим образом.

1-я подзадача:

$$\begin{gathered} f_0(x_0)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i g_i(x_0)\to\min,\\ x_0\in X_0 \end{gathered} \tag{36}$$

(решение 1-й подзадачи обозначим через $x_0(\beta)$);

i-я подзадача $(i=2, \ldots, n+1)$:

$$f_{i-1}(x_{i-1}) \to \min,$$
$$h_{i-1}(x_{i-1}) + \alpha_{i-1} \leqslant b_{i-1}, \tag{37}$$
$$x_{i-1} \in X_{i-1}$$

(решение i-й подзадачи обозначим через $x_{i-1}(\alpha_{i-1})$, соответствующий множитель Лагранжа $\lambda_{i-1}(\alpha_{i-1})$). Условия координации выражаются в данном случае в виде

$$\alpha_i = g_i(x_0(\beta)),$$
$$\beta_i = \lambda_i(\alpha_i) \tag{38}$$
$$(i=1, \ldots, n).$$

6. При декомпозиции модели (19) с помощью принципа прогнозирования взаимодействий мы имеем дело с т. н. бикоординацией, т. е. второй уровень (центр) модифицирует в ходе вычислений как целевые функции, так и ограничения соответствующих подсистем до тех пор, пока условия координации ((22) или (38)) не будут выполненными. В данной статье вопрос о способах координации не обсуждается. Отметим только, что разработанные здесь схемы декомпозиции можно перенести и на те случаи, когда вместе с оптимальным решением задачи (19) требуется найти и соответствующие множители Лагранжа.

Рассмотрим простой пример, заимствованный из [3]:

$$4(x_0-10)^2 + (x_1-10)^2 \to \min,$$
$$(x_0-6)^2 - 4(x_1-5) + 20 \leqslant 0,$$
$$0 \leqslant x_0,\ x_1 \leqslant 20.$$

В силу выражений (20) и (21) подзадачи принимают вид

$$4(x_0-10)^2 \to \min \qquad (x_1-10)^2 - 4\beta(x_1-5) \to \min$$
$$(x_0-6)^2 + \alpha \leqslant -20 \qquad 0 \leqslant x_1 \leqslant 20,$$
$$0 \leqslant x_0 \leqslant 20$$

причем $K_1(x) = -4(x_1-5)$.

В данном случае подзадачи можно решить аналитически, а именно:

$$x_0(\alpha) = \begin{cases} 10, & \text{если } \alpha < -36, \\ 6+\sqrt{-(\alpha+20)}, & \text{если } -36 \leqslant \alpha \leqslant -20, \\ \text{не существует, если} & \alpha > -20; \end{cases}$$

$$\lambda_1(\alpha) = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < -36, \\ \sqrt{\dfrac{256}{-(\alpha+20)}} - 4, & \text{если } -36 \leqslant \alpha < -20, \\ \text{не существует, если } \alpha \geqslant -20; & \end{cases}$$

$$x_1(\beta) = \begin{cases} 10+2\beta, & \text{если } 0 \leqslant \beta \leqslant 5, \\ 20, & \text{если } \beta \geqslant 5. \end{cases}$$

По (22) условие координации выражается в виде:

$$f(\alpha) \equiv \alpha + 4x_1(\lambda_1(\alpha)) - 20 = 0.$$

Для решения этого уравнения был применен метод хорд, причем в качестве начальных приближений были выбраны $\alpha_0=-60$, $\alpha_1=-21$. После восьми итераций были получены следующие результаты:

$$\alpha=-29{,}5090027,$$
$$\lambda_1(\alpha)=1{,}1886263\approx\hat{\lambda}_1,$$
$$x_0(\alpha)=9{,}0836671\approx\hat{x}_0,$$
$$x_1(\beta)=x_1(\lambda_1(\alpha))=12{,}3772526\approx\hat{x}_1,$$
$$f(\alpha)=0{,}0000000.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Месарович М., Мако Д., Такахара И., Теория иерархических многоуровневых систем, М., 1973.
2. Wierzbicki, A. P., Preprints of IFAC 5th World Congress, Paris, June 12—17, 1972, 3B, 30. 5.
3. Kronsjö T., Economics of Planning, 9, No. 1—2, 71 (1969).
4. Кронше Т., В кн.: Оптимизация, вып. 12 (29), Новосибирск, 1973, с. 127.
5. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 319 (1974).
6. Левитин Е. С., Поляк Б. Т., Ж. вычисл. матем. и матем. физики, 6, 787 (1966).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
4/XI 1976

S. ULM

MÕNINGATEST KOOSTÖÖ ENNUSTAMISE PRINTSIIBI RAKENDUSTEST

Artiklis esitatakse seos koostöö ennustamise printsiibi [1] ja A. P. Wierzbicki dekompositsioonimeetodi [2] vahel. Mainitud printsiipi on rakendatud ka T. Kronsjö käsitletud majandusmudeli [3, 4] dekompositsiooniks. Seejuures on tõestatud ülesannete koordineeruvus miinimumi tarvilike ja piisavate tingimuste abil.

S. ULM

ON SOME APPLICATIONS OF THE INTERACTION PREDICTION PRINCIPLE

A connection between the interaction prediction principle [1] and the decomposition method proposed by A. P. Wierzbicki [2], is established. This principle is also applied for decomposition of an economic model investigated by T. Kronsjö [3, 4]. The coordinability is proved via the necessary and sufficient conditions for minima.