

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÕIDE
FÜSIKA * МАТЕМАТИКА. 1976, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 4

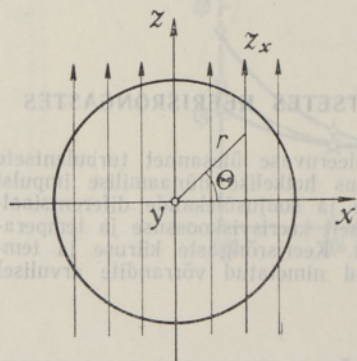
УДК 535.55

Э. БРОСМАН

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ТЕМПЕРАТУРНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В ЦИЛИНДРАХ МЕТОДОМ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ФОТОУПРУГОСТИ

E. BROSMAN. TEMPERATUURIPINGETE MÄÄRAMINE SILINDRITES INTEGRAALSEL FOTO-
ELASTSUSMEETODIL

E. BROSMAN. DETERMINATION OF THERMAL STRESSES IN CYLINDERS BY INTEGRATED
PHOTOELASTICITY



Для определения остаточных температурных напряжений в прозрачных цилиндрах кругового поперечного сечения xz (рис. 1) при отсутствии градиента напряжений в направлении оси цилиндра необходимо знать распределение интегральной разности хода $\delta(x)$. Поскольку нет вращения квазиглавных направлений на пути света, имеет место интегральный закон Вертгейма, что дает для луча света, находящегося на расстоянии x от оси z :

Рис. 1. Схема просвечивания кругового цилиндра.

$$\delta(x) = 2C \int_0^{z_x} [\sigma_y(r) - \sigma_r(r) \cos^2 \Theta - \sigma_\Theta(r) \sin^2 \Theta] dz, \quad (1)$$

где C — упругооптический коэффициент.

Из условия равновесия сегмента поперечного слоя цилиндра вытекает [1]

$$\int_0^{z_x} (\sigma_r \cos^2 \Theta + \sigma_\Theta \sin^2 \Theta) dz = 0. \quad (2)$$

Следовательно, разность хода обуславливается лишь продольным напряжением σ_y :

$$\delta(x) = 2C \int_0^{z_x} \sigma_y dz. \quad (3)$$

Выражая σ_y в виде степенного ряда [2]

$$\sigma_y = \sum_{h=0}^n a_{2h} r^{2h}, \quad 1 \geq r \geq 0, \quad (4)$$

получаем после интегрирования выражения (3) линейную систему уравнений

$$\delta(x_i)/2CR = \sum_{k=0}^n a_{2k} G_{2k}(x_i), \quad 1 \geq x_i \geq -1, \quad i=1, 2, \dots, m; m > n, \quad (5)$$

где R — радиус цилиндра,

$$G_{2k}(x_i) = \sum_{l=1,3,5,\dots}^{2k+1} (1-x_i^2)^{l/2} x_i^{2k+1-l} C_{2k+1}^l / l. \quad (6)$$

В уравнении (6) C_{2k+1}^l — биномиальные коэффициенты Ньютона. Из системы (5) можно вычислить коэффициенты a_{2k} , которые и определяют распределение σ_y согласно соотношению (4).

Полученную систему линейных уравнений (5) можно решить методом наименьших квадратов. В зависимости от условий возникновения напряжений имеет место т. н. закон суммы [3]

$$k\sigma_y = \sigma_r + \sigma_\theta, \quad (7)$$

где $k=1$ или $k=\mu$ (μ — коэффициент Пуассона). Подстановка соотношения (7) в уравнение равновесия

$$d(r\sigma_r)/dr - \sigma_\theta = 0 \quad (8)$$

приводит к линейному дифференциальному уравнению

$$d\sigma_r/dr + 2\sigma_r/r = k\sigma_y/r, \quad (9)$$

решение которого, с учетом разложения (4), можно выразить в виде

$$\sigma_r(r) = k \sum_{k=0}^n a_{2k} r^{2k} / (2k+2). \quad (10)$$

Окончательное решение задачи принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma_y(r) &= \sum_{k=0}^n a_{2k} r^{2k}, \\ \sigma_r(r) &= k \sum_{k=0}^n a_{2k} r^{2k} / (2k+2), \\ \sigma_\theta(r) &= k \sum_{k=0}^n a_{2k} r^{2k} (2k+1) / (2k+2). \end{aligned} \quad (11)$$

Полученный результат отличается от известного из литературы результата [4] тем, что компоненты напряжения описываются в элементарных функциях и на оси цилиндра компоненты напряжений σ_r и σ_θ определяются точно.

В качестве примера описанная выше методика была использована для определения напряжения в закаленном цилиндре из стекла марки № 29. Измерения разностей хода проводились в иммерсионной ванне на полярископе КСП-5 с помощью компенсатора СКК-2. Радиус цилиндра $R = 1,2$ см, упругооптический коэффициент $C = 2,0 \cdot 10^{-7}$ см²/кг, коэффициент $k = 1$.

График измеренного распределения разности хода показан на рис. 2. Эксперимент подтверждает теоретический вывод [4]

$$\int_{-R}^R \delta(x) dx = 0. \quad (12)$$

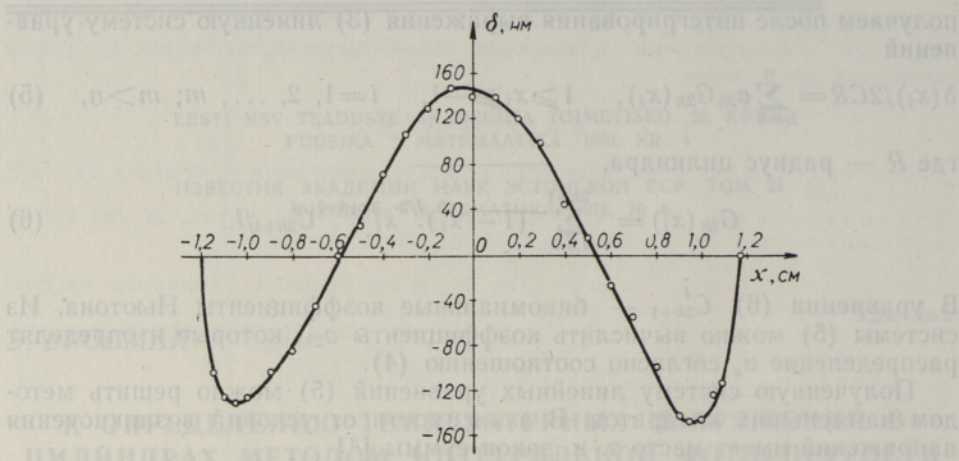


Рис. 2. Распределение интегральной разности хода в цилиндре.

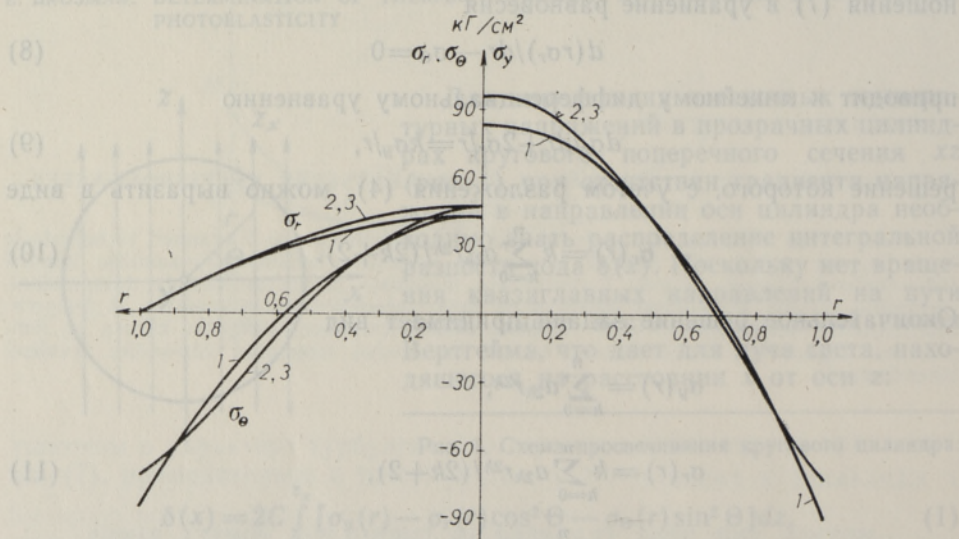


Рис. 3. Распределение напряжений σ_y , σ_r и σ_θ при разных степенях приближения (13).

Решение задачи на ЭВМ «Минск-32» подтвердило также предсказания теории [5] о том, что распределение продольных напряжений близко к параболическому. В различных приближениях были получены следующие результаты:

$$\begin{aligned}\sigma_y &= 85,7 - 171,6r^2, \\ \sigma_y &= 93,6 - 198,0r^2 + 78,0r^4, \\ \sigma_y &= 93,5 - 241,8r^2 + 65,0r^4 + 8,0r^6.\end{aligned}\quad (13)$$

Графически распределение компонентов напряжений σ_y , σ_r и σ_θ изображено на рис. 3. Видно, что на краю цилиндра распределение напряжений несколько отличается от параболического. Такая же картина на-

блюдалась при исследовании остаточных напряжений, возникающих в пластинках при их охлаждении от высоких температур [6].

Среднее значение напряжения σ_y по всему поперечному сечению $\int_0^1 \sigma_y(r) dr = 1,6 \text{ кг/см}^2$ составляет 1,7% от его максимального значения. Следовательно, это распределение можно считать практически уравновешенным.

ЛИТЕРАТУРА

1. Poritzky H., Phys., 5, No. 12, 406 (1934).
2. Абен Х. К., Интегральная фотоупругость, Таллин, 1975.
3. Инденбом В. Л., Житомирский И. С., Чебанова Г. С., Кристаллография, 18, № 1, 39 (1973).
4. O'Rourke R. C., Saenz A. W., Quart. Appl. Math., 8, No. 3, 303 (1950).
5. Sutton P. M., J. Amer. Ceram. Soc., 41, No. 3, 103 (1958).
6. Резников Б. А., ФТТ, 5, № 9, 2526 (1963).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
5/1 1976