

<https://doi.org/10.3176/phys.math.1976.4.04>

П. КАРД

УДК 535.345.6

## К ТЕОРИИ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННО-ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ СВЕТОФИЛЬТРОВ

Выведены в двух вариантах простые формулы, определяющие коэффициент пропускания интерференционно-поляризационного светофильтра (без учета потерь). Эти формулы могут быть эффективно использованы для нахождения наиболее выгодных конструкций таких фильтров.

### Введение

Хорошо известны описанные неоднократно в литературе интерференционно-поляризационные светофильтры, состоящие из последовательно расположенных двупреломляющих пластинок и поляризаторов. Существуют два основных типа таких фильтров. Для фильтров типа Лию (см. [1] и подробный обзор в [2]) характерно наличие поляризаторов во всех промежутках между двупреломляющими пластинками. Наоборот, в фильтрах типа Шольца (см. [3-8]) поляризаторов в промежутках нет, а имеются только входной и выходной поляризаторы. В настоящей статье мы будем рассматривать только светофильтры типа Шольца.

Несмотря на большое число работ, посвященных теории интерференционно-поляризационных светофильтров (см., кроме предыдущих ссылок, напр., [9-18]), и наличие рекомендаций, направленных на улучшение их характеристик, не все еще возможности, по-видимому, в этой области исчерпаны. В настоящей статье мы установим близкую аналогию между теоретическим описанием светофильтров типа Шольца и теорией многослойных интерференционных пленок. Эта аналогия позволит нам перенести методы, хорошо разработанные в теории пленок (см. [19]), в теорию интерференционно-поляризационных фильтров. Отсюда мы получим новые возможности для нахождения усовершенствованных конструкций таких фильтров.

### Основные теоретические формулы

Для описания поляризации света мы используем, следуя Эвансу [7], формализм Джонса [20, 21]. Приняв ось фильтра, т. е. направление распространения света, за ось  $z$  и взяв в плоскости  $xu$ , параллельной двупреломляющим пластинкам, произвольно декартовы оси  $x$  и  $y$ , будем описывать эллиптическую поляризацию монохроматической световой волны матрицей

$$A = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где  $A_x, A_y$  — комплексные амплитуды электрического вектора волны по осям  $x$  и  $y$ . Пусть волна падает перпендикулярно на двупреломляющую пластинку, вырезанную таким образом, что оптическая ось лежит в ее плоскости. Расположение пластинки определяется ее азимутом  $\varphi$ , т. е. углом между оптической осью и осью  $x$ . Прохождение волны сквозь пластинку сопровождается изменением ее поляризации; по выходе из пластинки матрица поляризации волны выражается формулой

$$A' = LA, \quad (2)$$

где

$$L = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \quad (3)$$

и

$$\gamma = \frac{kh(n_o - n_e)}{2}; \quad (4)$$

$n_o$  и  $n_e$  — показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей,  $h$  — толщина пластинки и

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (5)$$

волновое число ( $\lambda$  — длина волны). По поводу формул (2) и (3) отметим, что здесь не учитывается ни отражение на поверхностях пластинки, ни поглощение внутри нее. Отражение может быть сделано фактически ничтожным с помощью просветляющих покрытий, а поглощение приводит только (если не учитывать дихроизма) к уменьшению общей интенсивности, не влияя на поляризацию. Во всяком случае в данной статье мы будем поглощением пренебрегать.

Введем обозначения:

$$\Phi(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$\bar{\Phi}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (7)$$

и

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} \end{pmatrix}, \quad (8)$$

отметив, что матрицы  $\Phi$  и  $\bar{\Phi}$  удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi_2)\Phi(\varphi_1) &= \Phi(\varphi_2 + \varphi_1), \\ \bar{\Phi}(\varphi_2)\bar{\Phi}(\varphi_1) &= \bar{\Phi}(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \Phi(\varphi_2)\bar{\Phi}(\varphi_1) &= \bar{\Phi}(\varphi_2 + \varphi_1), \\ \bar{\Phi}(\varphi_2)\Phi(\varphi_1) &= \bar{\Phi}(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \quad (9)$$

(ср. аналогичные формулы (3.23) в [19]). Тогда формулу (3) можно переписать в виде

$$L = \Phi(\varphi)M(\gamma)\Phi(-\varphi); \quad (10)$$

перемножая матрицы, находим другое выражение матрицы  $L$ :

$$L = \cos \gamma \cdot E + i \sin \gamma \cdot \bar{\Phi}(2\varphi), \quad (11)$$

где  $E$  — единичная матрица.

Из формулы (2) вытекает, что если свет проходит последовательно сквозь  $N$  двупреломляющих пластинок, перенумерованных индексами  $1, 2, \dots, N$  (в направлении распространения света), то поляризация изменяется согласно формуле

$$A' = FA, \quad (12)$$

где

$$F = L_N L_{N-1} \dots L_1. \quad (13)$$

Формулы (10) — (13) являются основными формулами теории интерференционно-поляризационных светофильтров типа Шольца.

### Аналогия с теорией интерференционных пленок

Формулы (10) — (13) обнаруживают близкое сходство с соответствующими формулами теории многослойных оптических пленок (см. [19], с. 33). Разница состоит в том, что вместо матрицы поляризации в теории пленок фигурирует амплитудная матрица, элементами которой являются амплитуды прямой и обратной волн. Матрица, преобразующая амплитудную матрицу, выражается там подобно матрице  $F$  в формуле (13), а матрицы  $L$  имеют вид, подобный формулам (10) и (11). Разница состоит лишь в том, что вместо матриц  $\Phi$  и  $\bar{\Phi}$  в эти формулы входят там другие матрицы, элементы которых являются гиперболическими функциями от аргументов, связанных с показателями преломления слоев. Элементы матриц  $\Phi$  и  $\bar{\Phi}$  являются, аналогично, тригонометрическими функциями от (удвоенных) азимутов пластинок. Физический смысл, конечно, иной, но важно то, что соотношения (9) имеют совершенно одинаковый вид в обоих случаях. Именно это обстоятельство и делает обе теории математически вполне изоморфными, позволяя применить в теории интерференционно-поляризационных фильтров хорошо разработанные в теории интерференционных пленок методы и приемы.

### Преобразование основных формул

Для преобразования матрицы  $F$  имеются два основных способа (ср. [19], § 8).

Во-первых, перемножая в (13) матрицы  $L_1, L_2, \dots, L_N$ , взятые в виде (11), приходим, с учетом второй и четвертой формул (9), к выражению

$$F = \sum i^s \sin \gamma_{k_1} \sin \gamma_{k_2} \dots \sin \gamma_{k_s} \cos \gamma_{l_1} \cos \gamma_{l_2} \dots \cos \gamma_{l_{N-s}} \times \\ \times \Phi^{(-s)}(2\varphi_{k_s} - 2\varphi_{k_{s-1}} + \dots - (-1)^s \cdot 2\varphi_{k_1}). \quad (14)$$

Сумма берется здесь по всем  $2^N$  комбинациям разбиения индексов  $1, 2, \dots, N$  на две группы:  $k_1, k_2, \dots, k_s$  и  $l_1, l_2, \dots, l_{N-s}$ , причем  $s = 0, 1, \dots, N$  и  $k_1 < k_2 < \dots < k_s$ ;  $\Phi^{(-s)}$  означает  $\Phi$  при  $s$  четном и  $\bar{\Phi}$  при  $s$  нечетном. Принимая во внимание формулы (6) и (7), мы можем также написать отдельные формулы для элементов матрицы  $F$ :

$$F_{11} = F_{22}^* = \sum i^s \sin \gamma_{k_1} \sin \gamma_{k_2} \dots \sin \gamma_{k_s} \cos \gamma_{l_1} \cos \gamma_{l_2} \dots \cos \gamma_{l_{N-s}} \times \\ \times \cos(2\varphi_{k_s} - 2\varphi_{k_{s-1}} + \dots - (-1)^s \cdot 2\varphi_{k_1}) \quad (15)$$

и

$$F_{21} = -F_{12}^* = \sum i^s \sin \gamma_{k_1} \sin \gamma_{k_2} \dots \sin \gamma_{k_s} \cos \gamma_{l_1} \cos \gamma_{l_2} \dots \cos \gamma_{l_{N-s}} \times \\ \times \sin(2\varphi_{k_s} - 2\varphi_{k_{s-1}} + \dots - (-1)^s \cdot 2\varphi_{k_1}). \quad (16)$$

Формулы (14)–(16) аналогичны формулам (3.33)–(3.35) в [19].  
Второй способ требует введения матриц  $\bar{M}(\gamma)$  согласно формуле

$$\bar{M}(\gamma) = \begin{pmatrix} 0 & e^{i\gamma} \\ e^{-i\gamma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

причем эти матрицы вместе с матрицами  $M(\gamma)$  удовлетворяют соотношениям в точности того же вида, что и матрицы  $\Phi$  и  $\bar{\Phi}$  (см. (9)), а именно:

$$\begin{aligned} M(\gamma_2)M(\gamma_1) &= M(\gamma_2 + \gamma_1), \\ \bar{M}(\gamma_2)\bar{M}(\gamma_1) &= \bar{M}(\gamma_2 - \gamma_1), \\ M(\gamma_2)\bar{M}(\gamma_1) &= \bar{M}(\gamma_2 + \gamma_1), \\ \bar{M}(\gamma_2)M(\gamma_1) &= M(\gamma_2 - \gamma_1). \end{aligned} \quad (18)$$

Теперь перепишем формулу (13), имея в виду выражение (10) для матриц  $L$  и первые формулы (9) и (18), следующим образом:

$$F = M(\gamma_N + \gamma_{N-1} + \dots + \gamma_1) [M(-\gamma_N - \gamma_{N-1} - \dots - \gamma_1) \Phi(-\varphi_{N+1,N}) \times \\ \times M(\gamma_N + \gamma_{N-1} + \dots + \gamma_1)] [M(-\gamma_{N-1} - \gamma_{N-2} - \dots - \gamma_1) \Phi(-\varphi_{N,N-1}) \times \\ \times M(\gamma_{N-1} + \gamma_{N-2} + \dots + \gamma_1)] \dots [M(-\gamma_1) \Phi(-\varphi_{21}) M(\gamma_1)] \times \\ \times [M(0) \Phi(-\varphi_{10}) M(0)],$$

где

$$\varphi_{k+1,k} = \varphi_{k+1} - \varphi_k \quad (20)$$

и

$$\varphi_0 = \varphi_{N+1} = 0. \quad (21)$$

Далее перемножим матрицы в квадратных скобках. Результат таков:

$$M(-\gamma) \Phi(-\varphi) M(\gamma) = \cos \varphi \cdot E + \sin \varphi \cdot \sigma_3 \bar{M}(-2\gamma), \quad (22)$$

где

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (23)$$

— третья матрица Паули. Обозначим

$$\cos \varphi_{k+1,k} \cdot E + \sin \varphi_{k+1,k} \cdot \sigma_3 \bar{M}(-2\gamma_k - 2\gamma_{k-1} - \dots - 2\gamma_1) = Q_k. \quad (24)$$

Тогда

$$F = M(\gamma_N + \gamma_{N-1} + \dots + \gamma_1) Q_N Q_{N-1} \dots Q_0. \quad (25)$$

Остается перемножить все матрицы в этом произведении. Учитывая

формулы (18), а также тот факт, что матрицы  $M$  и  $\sigma_3$  коммутируют, а матрицы  $\bar{M}$  и  $\sigma_3$  антикоммутируют, находим

$$F = \sum_{s=0,1,\dots,N+1} (-1)^{[s/2]} \sigma_3^s \cdot x\varphi_{N+1,N} x\varphi_{N,N-1} \dots x\varphi_{10} \times \\ \times M^{(-s)} (\pm\gamma_N \pm \gamma_{N-1} \pm \dots \pm \gamma_1). \quad (26)$$

В этой формуле  $x$  означает  $\sin$  или  $\cos$ . Сумма берется по всем  $2^{N+1}$  комбинациям распределения всех  $x$  на синусы и косинусы;  $s$  есть число

синусов в данном члене суммы;  $M^{(-s)}$  есть  $M$  или  $\bar{M}$  при четном или нечетном  $s$  соответственно;  $[s/2]$  есть целая часть от  $s/2$ ; знаки аргумента

$M^{(-s)}$  определяются правилом: знак первого члена есть плюс, если  $x\varphi_{N+1,N}$  есть косинус, и минус, если  $x\varphi_{N+1,N}$  есть синус; знаки членов  $\gamma_{h+1}$  и  $\gamma_h$  одинаковы, если  $x\varphi_{h+1,h}$  есть косинус, и различны, если  $x\varphi_{h+1,h}$  есть синус.

По сравнению с аналогичной формулой в теории интерференционных пленок (см. формулу (3.37) в [19]), формула (26) внешне несколько сложнее, так как содержит под знаком суммы добавочный множитель  $(-1)^{[s/2]} \sigma_3^s$ . Однако на практике этот множитель учитывается очень легко, так как он равен  $i^s E$  при  $s$  четном и  $i^{s-1} \sigma_3$  при  $s$  нечетном.

Элементы матрицы  $F$  выражаются согласно формуле (26) следующим образом:

$$F_{11} = F_{22}^* = \sum_{s=0,2,\dots} i^s x\varphi_{N+1,N} x\varphi_{N,N-1} \dots x\varphi_{10} \exp[i(\pm\gamma_N \pm \gamma_{N-1} \pm \dots \pm \gamma_1)] \quad (27)$$

и

$$F_{21} = -F_{12}^* = \sum_{s=1,3,\dots} i^{s+1} x\varphi_{N+1,N} x\varphi_{N,N-1} \dots x\varphi_{10} \times \\ \times \exp[-i(\pm\gamma_N \pm \gamma_{N-1} \pm \dots \pm \gamma_1)]. \quad (28)$$

Эти формулы соответствуют формулам (3.38) и (3.39) в [19].

### Заключение

Если азимуты входного и выходного поляризаторов одинаковы и равны  $0^\circ$  или  $90^\circ$ , то амплитуда прошедшего сквозь фильтр света равна, соответственно,  $F_{11}$  или  $F_{11}^*$  (если принять амплитуду света, прошедшего сквозь входной поляризатор, равной единице). Если же азимут входного поляризатора равен  $0^\circ$ , а выходного  $90^\circ$ , или наоборот, то амплитуда прошедшего сквозь фильтр света равна, соответственно,  $F_{21}$  или  $-F_{21}^*$ . Интенсивность прошедшего света равна, следовательно, в этих двух случаях

$$I_N = F_{11} F_{11}^* \quad (29)$$

или

$$I_N = F_{21} F_{21}^*. \quad (30)$$

В простейшем случае толщины всех двупреломляющих пластинок равны, т. е.

$$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_N \equiv \gamma. \quad (31)$$

Тогда, согласно формулам (15) и (16) или (27) и (28), интенсивность  $I_N$  выражается как четный полином  $2N$ -й степени от  $\cos \gamma$  или  $\sin \gamma$  с коэффициентами, зависящими от азимутов  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  пластинок. От выбора азимутов зависит, следовательно, ход спектральной кривой пропускания (напомним, что величина  $\gamma$  пропорциональна волновому числу). Подбирая азимуты надлежащим образом, можно в большей или меньшей степени удовлетворить задаваемым наперед условиям. Простота наших формул (15) и (16) или (27) и (28) позволяет проводить подобные расчеты наиболее эффективным образом. Соответствующая методика вместе с иллюстрирующими ее примерами будет изложена в следующей статье.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lyot B., Ann. Astrophys., 7, 31 (1944). Цитируется по [2].
2. Розенберг Г. В., Оптика тонкослойных покрытий, М., 1958, с. 526—546.
3. Solc I., Чехосл. физ. ж., 4, 53 (1954).
4. Solc I., Чехосл. физ. ж., 4, 607 (1954).
5. Solc I., Чехосл. физ. ж., 5, 80 (1955).
6. Solc I., Чехосл. физ. ж., 5, 92 (1955).
7. Evans J. W., J. Opt. Soc. Amer., 48, 142 (1958).
8. Solc I., J. Opt. Soc. Amer., 55, 621 (1965).
9. Evans J. W., Appl. Opt., 2, 193 (1963).
10. Harris S. E., Ammann E. O., Chang I. C., J. Opt. Soc. Amer., 54, 1267 (1964).
11. Ammann E. O., Chang I. C., J. Opt. Soc. Amer., 55, 835 (1965).
12. Ammann E. O., J. Opt. Soc. Amer., 56, 943 (1966).
13. Ammann E. O., J. Opt. Soc. Amer., 56, 952 (1966).
14. Ammann E. O., Yarborough J. M., J. Opt. Soc. Amer., 56, 1746 (1966).
15. Ammann E. O., Yarborough J. M., J. Opt. Soc. Amer., 57, 349 (1967).
16. Raalte T. L. van, J. Opt. Soc. Amer., 57, 1217 (1967).
17. Schiffman B. M., J. Opt. Soc. Amer., 57, 1390 (1967).
18. Katzenstein J., J. Opt. Soc. Amer., 58, 1000 (1968).
19. Кард П. Г., Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок, Таллин, 1971.
20. Jones R. C., J. Opt. Soc. Amer., 31, 488 (1941).
21. Шерклифф У., Поляризованный свет, М., 1965, с. 40—45.

(88) Тартуский государственный  
университет

Поступила в редакцию  
30/I 1976

P. KARD

#### INTERFERENTS-POLARISATSIIONVALGUSFILTRITE TEOORIAST

Tuletatakse interferents-polarisatsioonvalgusfiltrite teooria põhivalemid. Maatriks  $F$  (valemid (12)—(14) ja (26)) teisendab filtrile langeva valguse polarisatsioonimaatriksi  $A$  filtri läbinud valguse polarisatsioonimaatriksiks  $A'$ . Valemis (13) esinevad maatriksid  $L$  (indeks on kaksikmurdva plaadi järjekorranumber) avalduvad valemitega (10) ja (11), kus  $E$  on ühikmaatriks, maatriksid  $\Phi$ ,  $\bar{\Phi}$  ja  $M$  on defineeritud valemitega (6)—(8),  $\varphi$  on kaksikmurdva plaadi asimuut ning  $\gamma$  lainearvuga  $k$  ja plaadi paksusega  $h$  võrdeline suurus (valem (4), kus  $n_o$  ja  $n_e$  on harilik ja ebaharilik kiire murdumisnäitajad). Valemis (14)  $s=0, 1, \dots, N$ ;  $N$  on plaatide arv ja summa on võetud üle  $(-)^s$  indekse  $k_1, k_2, \dots, k_s$  kõigi kombinatsioonide ( $k_1 < k_2 < \dots < k_s$ );  $\Phi$  on  $\bar{\Phi}$ , kui  $s$  on paaritu arv, ning  $\Phi$ , kui  $s$  on paarisarv. Valemis (26) esinevad suurused  $\varphi_{k+1,k}$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_{N+1}$  ja maatriksid  $\sigma_3$  ja  $\bar{M}$  on defineeritud valemitega (17), (20), (21) ja (23);  $x$  on  $\cos$  või  $\sin$ , kusjuures summa on võetud üle kõigi võimalike koosinuste ja siinuste kombinatsioonide;  $s$  on siinuste arv mingis summa liikmes;  $M$  on  $\bar{M}$ , kui  $s$  on paaritu arv, ning  $M$ , kui  $s$  on paarisarv; kui  $x\varphi_{N+1,N}$  on  $\cos \varphi_{N+1,N}$  või  $\sin \varphi_{N+1,N}$ , siis  $M$  argumendi avaldises on esimene liige vastavalt  $+\gamma_N$  või  $-\gamma_N$ ; kui  $x\varphi_{k+1,k}$  on  $\cos \varphi_{k+1,k}$  või  $\sin \varphi_{k+1,k}$ , siis on liikmete  $\gamma_{k+1}$  ja  $\gamma_k$  märgid vastavalt kas ühesugused või erinevad.

P. KARD

ON THE THEORY OF BIREFRINGENT CHAIN LIGHT-FILTERS

New fundamental formulae describing the birefringent chain light-filters of Solc type are derived. The matrix  $F$  (see formulae (12)—(14) and (26)) transforms the polarization matrix  $A$  of the entering light into the polarization matrix  $A'$  of the emerging light. The matrices  $L$  in (13), having indices of the birefringent plates, are defined by formulae (10) or (11), where  $E$  denotes the  $2 \times 2$  unit matrix, the matrices  $\Phi$ ,  $\bar{\Phi}$ , and  $M$  are defined by formulae (6)—(8),  $\varphi$  is the azimuth of the plate and  $\gamma$  is defined by formula (4), where  $k$  is the wave-number,  $h$  is the thickness of the plate and  $n_o$ ,  $n_e$  are its refractive indices. In formula (14)  $s = 0, 1, \dots, N$ ,  $N$  being the number of plates. Summation runs over all the combinations of indices  $k_1, k_2, \dots, k_s$  ( $k_1 < k_2 < \dots < k_s$ );  $\Phi$  is  $\bar{\Phi}$  (or  $\Phi$ ), when  $s$  is odd (or even). The quantities  $\varphi_{h+1,h}$ ,  $\varphi_0$ ,  $\varphi_{N+1}$  and the matrices  $\sigma_s$  and  $\bar{M}$  in formula (26) are defined by formulae (17), (20), (21) and (23);  $x$  means cosine or sine; summation runs over all the possible combinations of cosines and sines,  $s$  being the number of sines;  $M$  is  $\bar{M}$  (or  $M$ ), when  $s$  is odd (or even); the signs of the  $\gamma$ 's in the argument of  $M$  are as follows:  $\gamma_N$  has  $+$ , if  $x \varphi_{N+1,N}$  is cosine, and  $-$ , if  $x \varphi_{N+1,N}$  is sine;  $\gamma_{h+1}$  and  $\gamma_h$  have the same signs, if  $x \varphi_{h+1,h}$  is cosine, and have the opposite signs if  $x \varphi_{h+1,h}$  is sine.