EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KOIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 4

УДК 535.345.6

П. КАРД

К ТЕОРИИ ИНТЕРФЕРЕНЦИОННО-ПОЛЯРИЗАЦИОННЫХ СВЕТОФИЛЬТРОВ

Выведены в двух вариантах простые формулы, определяющие коэффициент пропускания интерференционно-поляризационного светофильтра (без учета потерь). Эти формулы могут быть эффективно использованы для нахождения наиболее выгодных конструкций таких фильтров.

Введение

Хорошо известны описанные неоднократно в литературе интерференционно-поляризационные светофильтры, состоящие из последовательно расположенных двупреломляющих пластинок и поляризаторов. Существуют два основных типа таких фильтров. Для фильтров типа Лио (см. [1] и подробный обзор в [2]) характерно наличие поляризаторов во всех промежутках между двупреломляющими пластинками. Наоборот, в фильтрах типа Шольца (см. [3–8]) поляризаторов в промежутках нет, а имеются только входной и выходной поляризаторы. В настоящей статье мы будем рассматривать только светофильтры типа Шольца.

Несмотря на большое число работ, посвященных теории интерференционно-поляризационных светофильтров (см., кроме предыдущих ссылок, напр., [9–18]), и наличие рекомендаций, направленных на улучшение их характеристик, не все еще возможности, по-видимому, в этой области исчерпаны. В настоящей статье мы установим близкую аналогию между теоретическим описанием светофильтров типа Шольца и теорией многослойных интерференционных пленок. Эта аналогия позволит нам перенести методы, хорошо разработанные в теории пленок (см. [19]), в теорию интерференционно-поляризационных фильтров. Отсюда мы получим новые возможности для нахождения усовершенствованных конструкций таких фильтров.

Основные теоретические формулы

Для описания поляризации света мы используем, следуя Эвансу [7], формализм Джонса [20, 21]. Приняв ось фильтра, т. е. направление распространения света, за ось z и взяв в плоскости xy, параллельной двупреломляющим пластинкам, произвольно декартовы оси x и y, будем описывать эллиптическую поляризацию монохроматической световой волны матрицей

$$A=\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где A_x, A_y — комплексные амплитуды электрического вектора волны по осям x и y. Пусть волна падает перпендикулярно на двупреломляющую пластинку, вырезанную таким образом, что оптическая ось лежит в ее плоскости. Расположение пластинки определяется ее азимутом φ, т. е. углом между оптической осью и осью x. Прохождение волны сквозь пластинку сопровождается изменением ее поляризации; по выходе из пластинки матрица поляризации волны выражается формулой

$$A' = LA, \tag{2}$$

где

$$L = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \tag{3}$$

и

$$\gamma = \frac{kh(n_o - n_e)}{2}; \tag{4}$$

n_o и n_e — показатели преломления обыкновенного и необыкновенного лучей, h — толщина пластинки и

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \tag{5}$$

волновое число (λ — длина волны). По поводу формул (2) и (3) отметим, что здесь не учитывается ни отражение на поверхностях пластинки, ни поглощение внутри нее. Отражение может быть сделано фактически ничтожным с помощью просветляющих покрытий, а поглощение приводит только (если не учитывать дихроизма) к уменьшению общей интенсивности, не влияя на поляризацию. Во всяком случае в данной статье мы будем поглощением пренебрегать.

Введем обозначения:

$$\Phi(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$\bar{\Phi}(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}, \tag{7}$$

и

$$M(\gamma) = \begin{pmatrix} e^{i\gamma} & 0 \\ 0 & e^{-i\gamma} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

отметив, что матрицы Φ и $\bar{\Phi}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi_2)\Phi(\varphi_1) &= \Phi(\varphi_2 + \varphi_1), \\ \bar{\Phi}(\varphi_2)\bar{\Phi}(\varphi_1) &= \Phi(\varphi_2 - \varphi_1), \\ \Phi(\varphi_2)\bar{\Phi}(\varphi_1) &= \bar{\Phi}(\varphi_2 + \varphi_1), \\ \bar{\Phi}(\varphi_2)\Phi(\varphi_1) &= \bar{\Phi}(\varphi_2 - \varphi_1) \end{aligned} \tag{9}$$

(ср. аналогичные формулы (3.23) в [19]). Тогда формулу (3) можно переписать в виде

$$L = \Phi(\varphi) M(\gamma) \Phi(-\varphi); \tag{10}$$

перемножая матрицы, находим другое выражение матрицы L:

$$L=\cos\gamma\cdot E+i\sin\gamma\cdot\overline{\Phi}(2\varphi), \tag{11}$$

где E — единичная матрица.

Из формулы (2) вытекает, что если свет проходит последовательно сквозь N двупреломляющих пластинок, перенумерованных индексами $1, 2, \ldots, N$ (в направлении распространения света), то поляризация изменяется согласно формуле

$$A'=FA, \tag{12}$$

где

$$F=L_N L_{N-1}\ldots L_1. \tag{13}$$

Формулы (10)—(13) являются основными формулами теории интерференционно-поляризационных светофильтров типа Шольца.

Аналогия с теорией интерференционных пленок

Формулы (10)—(13) обнаруживают близкое сходство с соответствующими формулами теории многослойных оптических пленок (см. [19], с. 33). Разница состоит в том, что вместо матрицы поляризации в теории пленок фигурирует амплитудная матрица, элементами которой являются амплитуды прямой и обратной волн. Матрица, преобразующая амплитудную матрицу, выражается там подобно матрице F в формуле (13), а матрицы L имеют вид, подобный формулам (10) и (11). Разница состоит лишь в том, что вместо матриц Φ и $\overline{\Phi}$ в эти формулы входят там другие матрицы, элементы которых являются гиперболическими функциями от аргументов, связанных с показателями преломления слоев. Элементы матриц Φ и $\overline{\Phi}$ являются, аналогично, тригонометрическими функциями от (удвоенных) азимутов пластинок. Физический смысл, конечно, иной, но важно то, что соотношения (9) имеют совершенно одинаковый вид в обоих случаях. Именно это обстоятельство и делает обе теории математически вполне изоморфными, позволяя применить в теории интерференционно-поляризационных фильтров хорошо разработанные в теории интерференционных пленок методы и приемы.

Преобразование основных формул

Для преобразования матрицы F имеются два основных способа (ср. [19], § 8).

Во-первых, перемножая в (13) матрицы $L_1, L_2, \ldots, L_N$, взятые в виде (11), приходим, с учетом второй и четвертой формул (9), к выражению

$$F=\sum i^s \sin\gamma_{k_1}\sin\gamma_{k_2}\ldots\sin\gamma_{k_s}\cos\gamma_{l_1}\cos\gamma_{l_2}\ldots\cos\gamma_{l_{N-s}}\times$$
$$\times\overset{(-)^s}{\Phi}(2\varphi_{k_s}-2\varphi_{k_{s-1}}+-\ldots-(-1)^s\cdot 2\varphi_{k_1}). \tag{14}$$

Сумма берется здесь по всем 2^N комбинациям разбиения индексов $1, 2, \ldots, N$ на две группы: $k_1, k_2, \ldots, k_s$ и $l_1, l_2, \ldots, l_{N-s}$, причем $s=0, 1, \ldots, N$ и $k_1<k_2<\ldots<k_s$; $\overset{(-)^s}{\Phi}$ означает Φ при s четном и $\overline{\Phi}$ при s нечетном. Принимая во внимание формулы (6) и (7), мы можем также написать отдельные формулы для элементов матрицы F:

$$F_{11}=\overset{*}{F}_{22}=\sum i^s \sin\gamma_{k_1}\sin\gamma_{k_2}\ldots\sin\gamma_{k_s}\cos\gamma_{l_1}\cos\gamma_{l_2}\ldots\cos\gamma_{l_{N-s}}\times$$
$$\times\cos(2\varphi_{k_s}-2\varphi_{k_{s-1}}+-\ldots-(-1)^s\cdot 2\varphi_{k_1}) \tag{15}$$

и

$$F_{21}=-\overset{*}{F}_{12}=\sum i^s \sin\gamma_{k_1}\sin\gamma_{k_2}\ldots\sin\gamma_{k_s}\cos\gamma_{l_1}\cos\gamma_{l_2}\ldots\cos\gamma_{l_{N-s}}\times$$
$$\times\sin(2\varphi_{k_s}-2\varphi_{k_{s-1}}+-\ldots-(-1)^s\cdot 2\varphi_{k_1}). \tag{16}$$

Формулы (14)—(16) аналогичны формулам (3.33)—(3.35) в [19].

Второй способ требует введения матриц $\overline{M}(\gamma)$ согласно формуле

$$\overline{M}(\gamma)=\begin{pmatrix}0 & e^{i\gamma}\\ e^{-i\gamma} & 0\end{pmatrix}, \tag{17}$$

причем эти матрицы вместе с матрицами $M(\gamma)$ удовлетворяют соотношениям в точности того же вида, что и матрицы Φ и $\overline{\Phi}$ (см. (9)), а именно:

$$\begin{aligned}M(\gamma_2)M(\gamma_1)&=M(\gamma_2+\gamma_1),\\ \overline{M}(\gamma_2)\overline{M}(\gamma_1)&=M(\gamma_2-\gamma_1),\\ M(\gamma_2)\overline{M}(\gamma_1)&=\overline{M}(\gamma_2+\gamma_1),\\ \overline{M}(\gamma_2)M(\gamma_1)&=\overline{M}(\gamma_2-\gamma_1).\end{aligned} \tag{18}$$

Теперь перепишем формулу (13), имея в виду выражение (10) для матриц L и первые формулы (9) и (18), следующим образом:

$$\begin{aligned}F=M(\gamma_N+\gamma_{N-1}+\ldots+\gamma_1)\,[M(-\gamma_N-\gamma_{N-1}-\ldots-\gamma_1)\,\Phi(-\varphi_{N+1,N})\times\\ \times M(\gamma_N+\gamma_{N-1}+\ldots+\gamma_1)]\,[M(-\gamma_{N-1}-\gamma_{N-2}-\ldots-\gamma_1)\,\Phi(-\varphi_{N,N-1})\times\\ \times M(\gamma_{N-1}+\gamma_{N-2}+\ldots+\gamma_1)]\ldots[M(-\gamma_1)\,\Phi(-\varphi_{21})\,M(\gamma_1)]\times\\ \times[M(0)\,\Phi(-\varphi_{10})\,M(0)],\end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\varphi_{k+1,k}=\varphi_{k+1}-\varphi_k \tag{20}$$

и

$$\varphi_0=\varphi_{N+1}=0. \tag{21}$$

Далее перемножим матрицы в квадратных скобках. Результат таков:

$$M(-\gamma)\,\Phi(-\varphi)\,M(\gamma)=\cos\varphi\cdot E+\sin\varphi\cdot\sigma_3\overline{M}(-2\gamma), \tag{22}$$

где

$$\sigma_3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \tag{23}$$

— третья матрица Паули. Обозначим

$$\cos\varphi_{k+1,k}\cdot E+\sin\varphi_{k+1,k}\cdot\sigma_3\overline{M}(-2\gamma_k-2\gamma_{k-1}-\ldots-2\gamma_1)=Q_k. \tag{24}$$

Тогда

$$F=M(\gamma_N+\gamma_{N-1}+\ldots+\gamma_1)\,Q_NQ_{N-1}\ldots Q_0. \tag{25}$$

Остается перемножить все матрицы в этом произведении. Учитывая формулы (18), а также тот факт, что матрицы M и σ_3 коммутируют, а матрицы $\overline{M}$ и σ_3 антикоммутируют, находим

$$F=\sum_{s=0,1,\ldots,N+1}(-1)^{[s/2]}\overset{s}{\sigma_3}\cdot x\varphi_{N+1,N}x\varphi_{N,N-1}\ldots x\varphi_{10}\times$$

$$\times\overset{(-)^s}{M}(\pm\gamma_N\pm\gamma_{N-1}\pm\ldots\pm\gamma_1). \qquad (26)$$

В этой формуле x означает sin или cos. Сумма берется по всем 2^{N+1} комбинациям распределения всех x на синусы и косинусы; s есть число синусов в данном члене суммы; $\overset{(-)^s}{M}$ есть M или $\overline{M}$ при четном или нечетном s соответственно; $[s/2]$ есть целая часть от $s/2$; знаки аргумента $\overset{(-)^s}{M}$ определяются правилом: знак первого члена есть плюс, если $x_{\varphi N+1,N}$ есть косинус, и минус, если $x\varphi_{N+1,N}$ есть синус; знаки членов γ_{k+1} и γ_k одинаковы, если $x\varphi_{k+1,k}$ есть косинус, и различны, если $x\varphi_{k+1,k}$ есть синус.

По сравнению с аналогичной формулой в теории интерференционных пленок (см. формулу (3.37) в [19]), формула (26) внешне несколько сложнее, так как содержит под знаком суммы добавочный множитель $(-1)^{[s/2]}\sigma_3^s$. Однако на практике этот множитель учитывается очень легко, так как он равен i^sE при s четном и $i^{s-1}\sigma_3$ при s нечетном.

Элементы матрицы F выражаются согласно формуле (26) следующим образом:

$$F_{11}=F_{22}^{*}=\sum_{s=0,2,\ldots}i^s x\varphi_{N+1,N}x\varphi_{N,N-1}\ldots x\varphi_{10}\exp[i(\pm\gamma_N\pm\gamma_{N-1}\pm\ldots\pm\gamma_1)] \qquad (27)$$

и

$$F_{21}=-F_{12}^{*}=\sum_{s=1,3,\ldots}i^{s+1}x\varphi_{N+1,N}x\varphi_{N,N-1}\ldots x\varphi_{10}\times$$

$$\times\exp[-i(\pm\gamma_N\pm\gamma_{N-1}\pm\ldots\pm\gamma_1)]. \qquad (28)$$

Эти формулы соответствуют формулам (3.38) и (3.39) в [19].

Заключение

Если азимуты входного и выходного поляризаторов одинаковы и равны 0° или 90°, то амплитуда прошедшего сквозь фильтр света равна, соответственно, F_{11} или F_{11}^{*} (если принять амплитуду света, прошедшего сквозь входной поляризатор, равной единице). Если же азимут входного поляризатора равен 0°, а выходного 90°, или наоборот, то амплитуда прошедшего сквозь фильтр света равна, соответственно, F_{21} или $-F_{21}^{*}$. Интенсивность прошедшего света равна, следовательно, в этих двух случаях

$$I_N=F_{11}F_{11}^{*} \qquad (29)$$

или

$$I_N=F_{21}F_{21}^{*}. \qquad (30)$$

В простейшем случае толщины всех двупреломляющих пластинок равны, т. е.

$$\gamma_1=\gamma_2=\ldots=\gamma_N\equiv\gamma. \qquad (31)$$

Тогда, согласно формулам (15) и (16) или (27) и (28), интенсивность I_N выражается как четный полином $2N$-й степени от $\cos\gamma$ или $\sin\gamma$ с коэффициентами, зависящими от азимутов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_N$ пластинок. От выбора азимутов зависит, следовательно, ход спектральной кривой пропускания (напомним, что величина γ пропорциональна волновому числу). Подбирая азимуты надлежащим образом, можно в большей или меньшей степени удовлетворить задаваемым наперед условиям. Простота наших формул (15) и (16) или (27) и (28) позволяет проводить подобные расчеты наиболее эффективным образом. Соответствующая методика вместе с иллюстрирующими ее примерами будет изложена в следующей статье.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lyot B., Ann. Astrophys., **7**, 31 (1944). Цитируется по [2].
2. Розенберг Г. В., Оптика тонкослойных покрытий, М., 1958, с. 526—546.
3. Šolc I., Чехосл. физ. ж., **4**, 53 (1954).
4. Šolc I., Чехосл. физ. ж., **4**, 607 (1954).
5. Šolc I., Чехосл. физ. ж., **5**, 80 (1955).
6. Šolc I., Чехосл. физ. ж., **5**, 92 (1955).
7. Evans J. W., J. Opt. Soc. Amer., **48**, 142 (1958).
8. Šolc I., J. Opt. Soc. Amer., **55**, 621 (1965).
9. Evans J. W., Appl. Opt., **2**, 193 (1963).
10. Harris S. E., Ammann E. O., Chang I. C., J. Opt. Soc. Amer., **54**, 1267 (1964).
11. Ammann E. O., Chang I. C., J. Opt. Soc. Amer., **55**, 835 (1965).
12. Ammann E. O., J. Opt. Soc. Amer., **56**, 943 (1966).
13. Ammann E. O., J. Opt. Soc. Amer., **56**, 952 (1966).
14. Ammann E. O., Yarborough J. M., J. Opt. Soc. Amer., **56**, 1746 (1966).
15. Ammann E. O., Yarborough J. M., J. Opt. Soc. Amer., **57**, 349 (1967).
16. Raalte T. L. van, J. Opt. Soc. Amer., **57**, 1217 (1967).
17. Schiffman B. M., J. Opt. Soc. Amer., **57**, 1390 (1967).
18. Katzenstein J., J. Opt. Soc. Amer., **58**, 1000 (1968).
19. Кард П. Г., Анализ и синтез многослойных интерференционных пленок, Таллин, 1971.
20. Jones R. C., J. Opt. Soc. Amer., **31**, 488 (1941).
21. Шерклифф У., Поляризованный свет, М., 1965, с. 40—45.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 30/I 1976

P. KARD

INTERFERENTS-POLARISATSIOONVALGUSFILTRITE TEOORIAST

Tuletatakse interferents-polarisatsioonvalgusfiltrite teooria põhivalemid. Maatriks F (valemid (12)—(14) ja (26)) teisendab filtrile langeva valguse polarisatsioonimaatriksi A filtri läbinud valguse polarisatsioonimaatriksiks A'. Valemis (13) esinevad maatriksid L (indeks on kaksikmurdva plaadi järjekorranumber) avalduvad valemitega (10) ja (11), kus E on ühikmaatriks, maatriksid Φ, $\overline{\Phi}$ ja M on defineeritud valemitega (6)—(8), φ on kaksikmurdva plaadi asimuut ning γ lainearvuga k ja plaadi paksusega h võrdeline suurus (valem (4), kus n_o ja n_e on hariliku ja ebahariliku kiire murdumisnäitajad). Valemis (14) $s=0, 1, \ldots, N$; N on plaatide arv ja summa on võetud üle indeksite $k_1, k_2, \ldots, k_s$ kõigi kombinatsioonide ($k_1<k_2<\ldots<k_s$); $\overset{(-)^s}{\Phi}$ on $\overline{\Phi}$, kui s on paaritu arv, ning Φ, kui s on paarisarv. Valemis (26) esinevad suurused $\varphi_{k+1,k}$, φ_0, φ_{N+1} ja maatriksid σ_3 ja $\overline{M}$ on defineeritud valemitega (17), (20), (21) ja (23); x on cos või sin, kusjuures summa on võetud üle kõigi võimalike koosinuste ja siinuste kombinatsioonide; s on siinuste arv mingis summa liikmes; $\overset{(-)^s}{M}$ on $\overline{M}$, kui s on paaritu arv, ning M, kui s on paarisarv; kui $\mathrm{x}\varphi_{N+1,N}$ on $\cos\varphi_{N+1,N}$ või $\sin\varphi_{N+1,N}$, siis $\overset{(-)^s}{M}$ argumendi avaldises on esimene liige vastavalt $+\gamma_N$ või $-\gamma_N$; kui $\mathrm{x}\varphi_{k+1,k}$ on $\cos\varphi_{k+1,k}$ või $\sin\varphi_{k+1,k}$, siis on liikmete γ_{k+1} ja γ_k märgid vastavalt kas ühesugused või erinevad.

P. KARD

ON THE THEORY OF BIREFRINGENT CHAIN LIGHT-FILTERS

New fundamental formulae describing the birefringent chain light-filters of Šolc type are derived. The matrix F (see formulae (12)—(14) and (26)) transforms the polarization matrix A of the entering light into the polarization matrix A' of the emerging light. The matrices L in (13), having indices of the birefringent plates, are defined by formulae (10) or (11), where E denotes the 2×2 unit matrix, the matrices Φ, $\overline{\Phi}$, and M are defined by formulae (6)—(8), φ is the azimuth of the plate and γ is defined by formula (4), where k is the wave-number, h is the thickness of the plate and n_o, n_e are its refractive indices. In formula (14) $s = 0, 1, \ldots, N$, N being the number of plates. Summation runs over all the combinations of indices $k_1, k_2, \ldots, k_s$ ($k_1 < k_2 < \ldots < k_s$); $\overset{(-)^s}{\Phi}$ is $\overline{\Phi}$ (or Φ), when s is odd (or even). The quantities $\varphi_{k+1,k}$, φ_0, φ_{N+1} and the matrices σ_3 and $\overline{M}$ in formula (26) are defined by formulae (17), (20), (21) and (23); x means cosine or sine; summation runs over all the possible combinations of cosines and sines, s being the number of sines; $\overset{(-)^s}{M}$ is $\overline{M}$ (or M), when s is odd (or even); the signs of the γ's in the argument of $\overset{(-)^s}{M}$ are as follows: γ_N has $+$, if x $\varphi_{N+1,N}$ is cosine, and $-$, if x $\varphi_{N+1,N}$ is sine; γ_{k+1} and γ_k have the same signs, if x $\varphi_{k+1,k}$ is cosine, and have the opposite signs if x $\varphi_{k+1,k}$ is sine.