EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 25. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1976, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 25
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1976, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1976.4.02

УДК 519.271/272

Елена РООС

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ СЕРИЙ ОДНОМЕРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С ПРОИЗВОЛЬНЫМ ХАРАКТЕРОМ ЗАВИСИМОСТИ

Пусть имеется последовательность серий случайных величин

$$\xi_{n0},\ \xi_{n1},\ \xi_{n2},\ \ldots,\ \xi_{nk_n}, \tag{1}$$

причем $0=t_{n0}<t_{n1}<\ldots<t_{nk_n}=1$ — разбиение отрезка $[0,1]$ такое, что $\lambda_n=\max\limits_k [t_{nk+1}-t_{nk}]\to 0,\ n\to\infty$.

Введем обозначения:

$$\Delta t_{nk}=t_{nk+1}-t_{nk};$$

$$\Delta\xi_{nk}=\xi_{nk+1}-\xi_{nk};$$

F_{nk} — минимальная σ-алгебра, образованная случайными величинами [1]; α_{nk}, β_{nk} — некоторые случайные величины. И пусть

$$M(\Delta\xi_{nk}/F_{nk})=\alpha_{nk}\Delta t_{nk}, \tag{2}$$

$$M([\Delta\xi_{nk}]^2/F_{nk})=\beta^2_{nk}\Delta t_{nk}+(\alpha_{nk}\Delta t_{nk})^2. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если существуют неслучайные функции* $a_n(x)$, $\sigma_n(x)$, *для которых при любом* $N>0$

$$\lim_{n\to\infty}\sup_k M\left[\frac{\alpha_{nk}-a_n(\xi_{nk})}{\sigma_n(\xi_{nk})}\right]^4\chi_N(\zeta_{nk})=0, \tag{4}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[1+\sup_{|f_n(x)|\leqslant N}\left(\frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)}\right)^4\right]\sup_k M\left[\frac{\beta_{nk}-\sigma_n(\xi_{nk})}{\sigma_n(\xi_{nk})}\right]^4\chi_N(\zeta_{nk})=0, \tag{5}$$

где

$$f_n(x)=\int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u\frac{a_n(v)}{\sigma^2_n(v)}dv\right\}du,\quad \zeta_{nk}=f_n(\xi_{nk}),\ \chi_N(x)$$ — *индикатор отрезка* $[-N,N]$, *и если имеют место условия* 1) *для произвольной постоянной* $N>0$

$$f'_n(x)\sigma_n(x)\leqslant K_N,\qquad \sigma_n(x)>0, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\lambda_n\sup_{|f_n(x)|\leqslant N}\left|\frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)}\right|^3+\left(\sup_{|f_n(x)|\leqslant N}\left|\frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)}\right|^2+1\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{i=0}^{k_n-1}M\left[\frac{\Delta\xi_{ni}}{\sigma_n(\xi_{ni})}\right]^4\chi_N(\zeta_{ni})\right\}=0, \tag{7}$$

$$\lim \sum_{i=0}^{k_n-1} M\left|\int_{\xi_{ni}}^{\xi_{ni+1}}\int_{\xi_{ni}}^{x}[f''_n(u)-f''_n(\xi_{ni})]\,du\,dx\right|\chi_N(\zeta_{ni})=0, \tag{8}$$

кроме того, существует функция $\sigma_0(x)$, *непрерывная всюду, за исключением, может быть, только конечного числа разрывов 1-го рода в каждой ограниченной области* $0<\delta\leqslant\sigma_0^2(x)\leqslant K[1+|x|^2]$ *и*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{k_n-1} M\left|f'_n(\xi_{ni})\,\sigma_n(\xi_{ni})-\sigma_0(\zeta_{ni})\right|^2\chi_N(\zeta_{ni})\,\Delta t_{ni}=0, \tag{9}$$

2) $\sup\limits_n P\{\sup\limits_i|\zeta_{ni}|>N\}\to 0,\ N\to\infty,$

а распределение случайной величины ζ_{n0} *сходится при* $n\to\infty$ *к распределению случайной величины* ζ_0, *то случайный процесс* $\zeta_n(t)$ *при* $n\to\infty$ *слабо сходится к решению уравнения Ито*

$$\zeta(t)=\zeta_0+\int_0^t\sigma_0(\zeta(s))\,dw(s) \tag{10}$$

и для всякого непрерывного на $C_{[0,1]}$ *функционала* F *распределение* $F(\zeta_n(t))$ *сходится к распределению* $F(\zeta(t))$.

Доказательство. Введем величину

$$\omega_{nk}=\frac{\Delta\xi_{nk}-\alpha_{nk}\Delta t_{nk}}{\beta_{nk}}. \tag{11}$$

Тогда $\Delta\xi_{nk}$ представима в виде

$$\Delta\xi_{nk}=\alpha_{nk}\Delta t_{nk}+\beta_{nk}\omega_{nk}, \tag{12}$$

и можно записать

$$\zeta_{nk+1}=f_n(\xi_{nk+1})=\zeta_{n0}+\sum_{i=0}^{k}f'_n(\xi_{ni})\,\Delta\xi_{ni}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}f''_n(\xi_{ni})\,[\Delta\xi_{ni}]^2+\sum_{i=0}^{k}\int_{\xi_{ni}}^{\xi_{ni+1}}\int_{\xi_{ni}}^{x}[f''_n(u)-f''_n(\xi_{ni})]\,du\,dx.$$

Далее, обозначим

$$R_n=\sum_{i=0}^{k}\int_{\xi_{ni}}^{\xi_{ni+1}}\int_{\xi_{ni}}^{x}[f''_n(u)-f''_n(\xi_{ni})]\,du\,dx. \tag{13}$$

Учитывая (12) и тот факт, что в силу вида функции $f_n(x)$ имеет место соотношение

$$f'_n(x)\,a_n(x)+1/2f''_n(x)\,\sigma''_n(x)=0, \tag{14}$$

получаем:

$$\zeta_{nk+1}=\zeta_{n0}+\sum_{i=0}^{k}f'_n(\xi_{ni})\,[\alpha_{ni}-a_n(\xi_{ni})]\,\Delta t_{ni}+\sum_{i=0}^{k}f'_n(\xi_{ni})\times$$

$$\times\beta_{ni}\omega_{ni}+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}f''_n(\xi_{ni})(\alpha_{ni}\Delta t_{ni})^2+\sum_{i=0}^{k}f''_n(\xi_{ni})\alpha_{ni}\beta_{ni}\omega_{ni}\Delta t_{ni}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}f''_n(\xi_{ni})[\beta_{ni}^2-\sigma_n^2(\xi_{ni})]\Delta t_{ni}+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k}f''_n(\xi_{ni})\beta_{ni}^2(\omega_{ni}^2-\Delta t_{ni})+R_n. \tag{15}$$

Оценим величину

$$I_1=\sum_{i=0}^{k}f'_n(\xi_{ni})[\alpha_{ni}-a_n(\xi_{ni})]\Delta t_{ni}.$$

Покажем, что

$$P\{\sup_k|I_1|>\varepsilon\}\to 0,\quad n\to\infty. \tag{16}$$

Действительно,

$$P\{\sup_k|I_1|>\varepsilon\}=P\{\sup_k\Big|\sum_{i=0}^{k}\chi_{|\zeta_{ni}|\leqslant N}f'_n(\xi_{ni})[\alpha_{ni}-a_n(\xi_{ni})]\Delta t_{ni}+$$

$$+\sum_{i=0}^{k}\chi_{|\zeta_{ni}|>N}f'_n(\xi_{ni})[\alpha_{ni}-a_n(\xi_{ni})]\Delta t_{ni}\Big|>\varepsilon\}\leqslant$$

$$\leqslant P\{\sup_k|\zeta_{nk}|>N\}+\frac{2}{\varepsilon}M(\sum_{i=0}^{k_n-1}\chi_{|\zeta_{ni}|\leqslant N}|f'_n(\xi_{ni})\times$$

$$\times[\alpha_{ni}-a_n(\xi_{ni})]|\,\Delta t_{ni})\leqslant P\{\sup_k|\zeta_{nk}|>N\}+$$

$$+\frac{2}{\varepsilon}K_N\sup_{0\leqslant i\leqslant k_n}\left(M\left[\frac{\alpha_{ni}-a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})}\right]^4\chi_{|\zeta_{ni}|\leqslant N}\right)^{1/4}\times$$

$$\times\sum_{i=0}^{k_n-1}\Delta t_{ni}\to 0,\quad n\to\infty,\quad t\in[0,\ 1].$$

Итак, (16) доказано. Рассмотрим теперь величину

$$I_{nk}=\sum_{i=0}^{k}f'_n(\xi_{ni})(\beta_{ni}+\sigma_n(\xi_{ni})-\sigma_n(\xi_{ni}))\omega_{ni}=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}f'_n(\xi_{ni})\sigma_n(\xi_{ni})\omega_{ni}+\sum_{i=0}^{k}f'_n(\xi_{ni})[\beta_{ni}-\sigma_n(\xi_{ni})]\omega_{ni}=I'_{nk}+I_2.$$

Покажем, что

$$P\{\sup_k|I_2|>\varepsilon\}\to 0,\quad n\to\infty. \tag{17}$$

Здесь имеет место следующая оценка:

$$P\{\sup_k|I_2|>\varepsilon\}\leqslant P\{\sup_k|\zeta_{nk}|>N\}+\frac{4}{\varepsilon^2}M(\sum_{i=0}^{k_n-1}\chi_{|\zeta_{ni}|\leqslant N}\times$$

$$\times |f'_n(\xi_{ni})[\beta_{ni}-\sigma_n(\xi_{ni})]\omega_{ni}|)^2 \leqslant P\{\sup_k |\zeta_{nk}|>N\}+$$

$$+\frac{4}{\varepsilon^2}K_N^2 \sup_{0\leqslant i\leqslant k_n-1}\left(M\left[\frac{\beta_{ni}-\sigma_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})}\right]^4 \chi_{|\zeta_{ni}|\leqslant N}\right)^{1/2}\times$$

$$\times\left(\sum_{i=0}^{k_n-1}\Delta t_{ni}\right)^{1/2}\to 0,\quad n\to\infty,\quad t\in[0,1],$$

в силу условий теоремы 1.

Далее, оценим

$$I_3=\sum_{i=0}^{k} f''_n(\xi_{ni})(\alpha_{ni}\Delta t_{ni})^2.$$

Так как

$$(\alpha_{ni})^2\leqslant 2(\alpha_{ni}-a_n(\xi_{ni}))^2+2a_n^2(\xi_{ni}),$$

то

$$|I_3|\leqslant \sum_{i=0}^{k}|f''_n(\xi_{ni})|\,a_n^2(\xi_{ni})\Delta t_{ni}^2+$$

$$+2\sum_{i=0}^{k}|f''_n(\xi_{ni})|[\alpha_{ni}-a_n(\xi_{ni})]^2\Delta t_{ni}^2=I'_3+I''_3,$$

$\sup\limits_k |I'_3|\to 0$ по вероятности, $n\to\infty$ (см. доказательство теоремы 1 [2]). Поскольку

$$|f''_n(x)|=|f'_n(x)\sigma_n(x)|\left|\frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)}\right|\frac{2}{\sigma_n^2(x)},$$

то в силу условия 1) теоремы 1

$$|f''_n(x)|\leqslant K_N\left|\frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)}\right|\frac{1}{\sigma_n^2(x)}. \tag{18}$$

Тогда

$$P\{\sup_k |I''_3|>\varepsilon\}\leqslant P\{\sup_k|\zeta_{nk}|>N\}+\frac{2}{\varepsilon}M\left(\sum_{i=0}^{k_n-1}\chi_{|\zeta_{ni}|\leqslant N}K_N\times\right.$$

$$\left.\times\left|\frac{a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})}\right|\left[\frac{\alpha_{ni}-a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})}\right]^2(\Delta t_{ni})^2\right)\leqslant P\{\sup_k|\zeta_{nk}|>N\}+$$

$$+\frac{2}{\varepsilon}K_N\lambda_n^2\sup_{|f_n(x)|\leqslant N}\left|\frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)}\right|\sup_i M\left[\frac{\alpha_{ni}-a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})}\right]^2\chi_{|\zeta_{ni}|\leqslant N},$$

а эта величина стремится к 0, $n\to\infty$, в силу условий теоремы 1. Следовательно,

$$\sup_k |I_3|\to 0\quad \text{по вероятности},\ n\to\infty. \tag{19}$$

Рассмотрим теперь

$$I_4 = \sum_{i=0}^{k} f''_n(\xi_{ni})\,a_{ni}\beta_{ni}\omega_{ni}\Delta t_{ni}.$$

$$I_4 = \sum_{i=0}^{k} f''_n(\xi_{ni})\,[\alpha_{ni} - a_n(\xi_{ni})]\,\beta_{ni}\omega_{ni}\Delta t_{ni} + \sum_{i=0}^{k} f''_n(\xi_{ni})\,a_n(\xi_{ni}) \times$$

$$\times \beta_{ni}\omega_{ni}\Delta t_{ni} = I'_4 + I''_4;$$

$$P\{\sup_k |I'_4| > \varepsilon\} \leqslant P\{\sup_k |\zeta_{nk}| > N\} + \frac{4}{\varepsilon^2} K_N^2 \sum_{i=0}^{k_n-1} M \left| \frac{a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right|^2 \times$$

$$\times \left| \frac{\alpha_{ni} - a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right|^2 \chi_{|\zeta_{ni}| \leqslant N} \left[\frac{\beta_{ni}}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right]^2 (\Delta t_{ni})^3 \leqslant P\{\sup_k |\zeta_{nk}| > N\} +$$

$$+ 2K_N^2 \sum_{i=0}^{k_n-1} M \left| \frac{a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right|^2 \left| \frac{\alpha_{ni} - a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right|^2 \left| \frac{\beta_{ni} - \sigma_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right|^2 \times$$

$$\times \chi_{|\zeta_{ni}| \leqslant N} (\Delta t_{ni})^3 + 2K_N^2 \sum_{i=0}^{k_n-1} M \left| \frac{a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right|^2 \left| \frac{\alpha_{ni} - a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right|^2 \times$$

$$\times (\Delta t_{ni})^3 \chi_{|\zeta_{ni}| \leqslant N} \leqslant P\{\sup_k |\zeta_{nk}| > N\} + 2K_N^2 \lambda_n^2 \times$$

$$\times \sup_{|f_n(x)| \leqslant N} \left| \frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)} \right|^2 \sup_i \sqrt{M \left| \frac{\alpha_{ni} - a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right|^4} \sqrt{M \left| \frac{\beta_{ni} - \sigma_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right|^4} \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{k_n-1} \Delta t_{ni} + 2K_N^2 \lambda_n^2 \sup_{|f_n(x)| \leqslant N} \left| \frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)} \right|^2 \sup_i \sqrt{M \left| \frac{\alpha_{ni} - a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right|^4},$$

а эта величина стремится к 0, $n \to \infty$, что следует из условий теоремы 1. Значит,

$$\sup_k |I'_4| \to 0 \quad \text{по вероятности}, \ n \to \infty.$$

Далее,

$$P\{\sup_k |I''_4| > \varepsilon\} \leqslant P\{\sup_k |\zeta_{nk}| > N\} + P\left\{ \sup_k \left| \sum_{i=0}^{k} f''_n(\xi_{ni}) \times \right.\right.$$

$$\left.\left. \times a_n(\xi_{ni})\,\beta_{ni}\omega_{ni}\Delta t_{ni}\chi_{|\zeta_{ni}| \leqslant N} \right| > \frac{\varepsilon}{2} \right\} \leqslant P\{\sup_k |\zeta_{nk}| > N\} +$$

$$+ \frac{4}{\varepsilon^2} K_N^2 \lambda_n^2 \sup_{|f_n(x)| \leqslant N} \left| \frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)} \right|^4 \sum_{i=0}^{k_n-1} M \left[\frac{\beta_{ni}}{\sigma_n(\xi_{ni})} \right]^2 \Delta t_{ni} \leqslant$$

$$\leqslant P\{\sup_k |\zeta_{nk}| > N\} + \frac{8}{\varepsilon^2} K_N^2 \lambda_n^2 \sup_{|f_n(x)| \leqslant N} \left| \frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)} \right|^4 \times$$

$$\times \sum_{i=0}^{k_n-1} M\left[\frac{\beta_{ni}-\sigma_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})}\right]^2 \Delta t_{ni}+\lambda_n^2 \sup_{|f_n(x)|\leqslant N}\left|\frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)}\right|^4 \sum_{i=0}^{k_n-1} \Delta t_{ni},$$

а последняя сумма стремится к 0, $n\to\infty$. Следовательно,

$$\sup_k |I_4|\to 0 \quad \text{по вероятности, } n\to\infty. \tag{20}$$

Оценим теперь

$$I_5=\sum_{i=0}^{k} f_n''(\xi_{ni})\left[\beta_{ni}^2-\sigma_n^2(\xi_{ni})\right]\Delta t_{ni}.$$

Поскольку

$$\left|\sum_{i=0}^{k} f_n''(\xi_{ni})\left[\beta_{ni}^2-\sigma_n^2(\xi_{ni})\right]\Delta t_{ni}\right|\leqslant 2K_N \sup_{|f_n(x)|\leqslant N}\left|\frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)}\right|\times$$

$$\times\sup_k\left|\frac{\beta_{nk}-\sigma_n(\xi_{nk})}{\sigma_n(\xi_{nk})}\right|^2 \sum_{i=0}^{k}\Delta t_{ni}+4K_N\sup_k\left[\frac{\beta_{nk}-\sigma_n(\xi_{nk})}{\sigma_n(\xi_{nk})}\right],$$

то

$$P\{\sup_k|I_5|>\varepsilon\}\leqslant P\{\sup_k|\zeta_{nk}|>N\}+\frac{8}{\varepsilon}K_N\left[1+\right.$$

$$\left.+\sup_{|f_n(x)|\leqslant N}\frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)}\right]\sup_k M\left[\frac{\beta_{nk}-\sigma_n(\xi_{nk})}{\sigma_n(\xi_{nk})}\right]\chi_{|\zeta_{nk}|\leqslant N}\to 0,\qquad n\to\infty.$$

Следовательно,

$$\sup_k|I_5|\to 0 \quad \text{по вероятности, } n\to\infty. \tag{21}$$

И, наконец, осталось оценить

$$I_6=\sum_{i=0}^{k} f_n''(\xi_{ni})\,\beta_{ni}^2(\omega_{ni}^2-\Delta t_{ni}).$$

$$P\{\sup_k|I_6|>\varepsilon\}\leqslant P\{\sup_k|\zeta_{nk}|>N\}+\frac{4}{\varepsilon^2}K_N^2\times$$

$$\times\sup_{|f_n(x)|\leqslant N}\left|\frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)}\right|^2\left\{2\sum_{i=0}^{k_n-1}\left[\frac{\Delta\xi_{ni}}{\sigma_n(\xi_{ni})}\right]^4+2\sum_{i=0}^{k_n-1}\left[\frac{\alpha_{ni}-a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})}\right]^4\times\right.$$

$$\times(\Delta t_{ni})^4+2\sum_{i=0}^{k_n-1}\left[\frac{a_n(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})}\right]^4(\Delta t_{ni})^4+2\sum_{i=0}^{k_n-1}\left[\frac{\beta_{ni}-\sigma_i(\xi_{ni})}{\sigma_n(\xi_{ni})}\right]^4\times$$

$$\left.\times(\Delta t_{ni})^2+2\lambda_n\sum_{i=0}^{k_n-1}\Delta t_{ni}\right\}\to 0,\qquad n\to\infty.$$

При оценке использовались соотношения (18) и

$$(\omega_{ni})^4\leqslant\frac{(\Delta\xi_{ni})^4}{\beta_{ni}^4}+\frac{(\alpha_{ni})^4}{\beta_{ni}^4}(\Delta t_{ni})^4.$$

Из этого следует:

$$\sup_k |I_6| \to 0 \quad \text{по вероятности, } n \to \infty. \tag{22}$$

Покажем теперь, что

$$I'_{nk} = \sum_{i=0}^{k} f'_n(\xi_{ni}) \sigma_n(\xi_{ni}) \omega_{ni} \xrightarrow{\text{слабо}} \int_0^t \sigma_0(\xi(s)) dw(s), \quad n \to \infty.$$

Для доказательства этого факта придется воспользоваться некоторыми леммами, доказательство которых, аналогичное доказательству соответствующих лемм в [2], труда не представляет.

Лемма 1. *Процесс $w_n(t)$ при $n \to \infty$ слабо сходится к винеровскому процессу.*

Здесь имеется в виду, что $w_n(t) = \sum_{t_{nk} < t} \omega_{nk}$.

Лемма 2. *Для любого конечного числа точек x_j, $j = \overline{1, m}$,*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sum_{k=0}^{k_n - 1} P\{|\zeta_{nk} - x_j| \leqslant \varepsilon, \ j = \overline{1,m}\} \Delta t_{nk} = 0.$$

Лемма 3. *Пусть $|g(x)| \leqslant C$. Тогда для любых $t' < t''$*

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} M \Big| \sum_{t' < t_{nk} < t''} g(\xi_{nk}) \omega_{nk} \Big|^4 \leqslant 6C^4 [t'' - t']^2.$$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Поскольку

$$\zeta_n(t) = \zeta_{nk} + \frac{t - t_{nk}}{t_{nk+1} - t_{nk}} (\zeta_{nk+1} - \zeta_{nk}), \quad t \in [t_{nk}, t_{nk+1}],$$

а

$$\zeta_{nk+1} = \zeta_{n0} + I_1 + I'_{nk} + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 + I_6 + R_n, \tag{23}$$

$$\sup_k |I_i| \xrightarrow{P} 0, \ n \to \infty, \ i = \overline{1,6}, \ |R_n| \xrightarrow{P} 0, \ n \to \infty, \tag{24}$$

по условиям теоремы 1, то легко показать, что

$$\lim_{c \to \infty} \overline{\lim_{n \to \infty}} P\{|\zeta_n(t)| > C\} = 0,$$

$$\lim_{h \to 0} \overline{\lim_{n \to \infty}} \sup_{|t' - t''| \leqslant h} P\{|\zeta_n(t') - \zeta_n(t'')| > \varepsilon\} = 0,$$

для любого $\varepsilon > 0$. Аналогичные соотношения выполняются и для процесса $w_n(t)$. Поэтому процесс $(\zeta_n(t), w_n(t))$ обладает свойством компактности [1] и будем считать, что для любой подпоследовательности $n_k \to \infty$ существует подпоследовательность $n'_k \to \infty$ такая, что $\zeta_{n'}(t) \xrightarrow{P} \zeta(t)$, $w_{n'}(t) \xrightarrow{P} w(t)$, где $\zeta(t)$ и $w(t)$ — некоторые случайные процессы. На основании леммы 1 $w(t)$ является винеровским процессом. Из соотношений (24):

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \Big|\zeta_{n'}(t) - \zeta_{n'}(0) - \int_0^t \hat{f}'_n(\zeta_{n'}(s)) dw_{n'}(s)\Big| \xrightarrow{P} 0, \ n' \to \infty, \tag{25}$$

где

$\hat{f}'_n(x) = f'_n(\varphi_n(x))\,\sigma_n(\varphi_n(x))$, $\varphi_n(x)$ — функция, обратная к функции $f_n(x)$. Так как

$$P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\int_0^t \hat{f}'_n(\zeta_n(s))\,dw_n(s) - \int_0^t \sigma_0(\zeta_n(s))\,dw_n(s)| > \varepsilon\} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{\varepsilon^2}\sum_{k=0}^{k_n-1} M|\hat{f}'_n(\zeta_{nk}) - \sigma_0(\zeta_{nk})|^2 \chi_N(\zeta_{nk})\,\Delta t_{nk} + P\{\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\zeta_n(t)| > N\}$$

для любых $\varepsilon > 0$ и $N > 0$, то

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}|\int_0^t \hat{f}'_n(\zeta_n(s))\,dw_n(s) - \int_0^t \sigma_0(\zeta_n(s))\,dw_n(s)| \xrightarrow{P} 0,\quad n\to\infty, \tag{26}$$

и далее доказательство проходит аналогично доказательству теоремы 1 в [2].

Итак, получаем:

$$\zeta(t) = \zeta_0 + \int_0^t \sigma_0(\zeta(s))\,dw(s) \tag{27}$$

и $F(\zeta_{n'_k}(t)) \to F(\zeta(t))$ с вероятностью 1, $n'_k \to \infty$, для любого непрерывного на $C_{[0,1]}$ функционала F. Из единственности (26) решения уравнения (27) и произвольности подпоследовательности n_k получаем доказательство теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы* 1, *а последовательность функций $g_n(x)$ такая, что для любой постоянной $N > 0$*

$$\lim_{n\to\infty}\Big\{\lambda_n\Big[\sup_{|f_n(x)|\leqslant N} g_n^2(x) + \sup_{|f_n(x)|\leqslant N}|g_n(x)|\Big(\frac{a_n(x)}{\sigma_n(x)}\Big)^2\Big] +$$

$$+ \sup_{|f_n(x)|\leqslant N} g_n^2(x)\sum_{k=0}^{k_n-1} M\Big[\frac{\Delta\xi_{nk}}{\sigma_n(\xi_{nk})}\Big]^4 \chi_N(\zeta_{nk})\Big\} = 0, \tag{28}$$

$$\sup_{|f_n(x)|\leqslant N}\Big|\int_0^x \frac{g_n(u)}{f'_n(u)\,\sigma_n^2(u)}\,du\Big| \leqslant \tilde{K}_N, \tag{29}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{k_n-1} M\Big|\int_{\xi_{nk}}^{\xi_{nk+1}}\int_{\xi_{nk}}^{x}[G''_n(u) - G''_n(\xi_{nk})]\,du\,dx\Big|\chi_N(\zeta_{nk}) = 0, \tag{30}$$

где

$$G_n(x) = 2\int_0^x f'_n(u)\int_0^u \frac{g_n(u)}{f'_n(v)\,\sigma_n^2(v)}\,dv\,du, \tag{31}$$

кроме того, существует функция $g(x)$, для которой

$$\int_0^x \frac{g_n(\varphi_n(u))}{[f'_n(\varphi_n(u))\,\sigma_n(\varphi_n(u))]^2}\,du \to g(x) \tag{32}$$

($\varphi_n(x)$ — функция, обратная к функции $f_n(x)$) при $n\to\infty$ равномерно в каждом компакте, не содержащем определенного (без точек сгуще-

ния) множества точек. Тогда случайная ломаная $\eta_n(t)$ *с вершинами в точках* $(t_{nk}, \sum_{i=0}^{k} g_n(\xi_{ni})\Delta t_{ni})$ *при* $n\to\infty$ *слабо сходится к процессу*

$$\eta(t)=2[\int_{\zeta_0}^{\zeta(t)} g(u)\,du-\int_0^t g(\zeta(s))\,d\zeta(s)], \tag{33}$$

где $\zeta(t)$ — *решение уравнения*

$$\zeta(t)=\zeta_0+\int_0^t \sigma_0(\zeta(s))\,dw(s), \tag{34}$$

и для всякого непрерывного на $C_{[0,1]}$ *функционала* F *распределение* $F(\eta_n(t))$ *сходится к распределению* $F(\eta(t))$.

Доказательство. $\Delta\xi_{nk}=\alpha_{nk}\Delta t_{nk}+\beta_{nk}\omega_{nk}$ (см. доказательство теоремы 1). В силу вида $G_n(x)$ имеем $G'_n(x)a_n(x)+1/2G''_n(x)\sigma^2_n(x)=g(x)$.

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{k} g_n(\xi_{ni})\Delta t_{ni}=G_n(\xi_{nk+1})-G_n(\xi_{n0})-\sum_{i=0}^{k} G'_n(\xi_{ni})\times$$

$$\times[\alpha_{ni}-a_n(\xi_{ni})]\Delta t_{ni}-\sum_{i=0}^{k} G'_n(\xi_{ni})\beta_{ni}\omega_{ni}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} G''_n(\xi_{ni})\times$$

$$\times(\alpha_{ni}\Delta t_{ni})^2-\sum_{i=0}^{k} G''_n(\xi_{ni})\alpha_{ni}\beta_{ni}\omega_{ni}\Delta t_{ni}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} G''_n(\xi_{ni})\times$$

$$\times[\beta^2_{ni}-\sigma^2_n(\xi_{ni})]\Delta t_{ni}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{k} G''_n(\xi_{ni})\beta^2_{ni}(\omega^2_{ni}-\Delta t_{ni})-$$

$$-\sum_{i=0}^{k}\int_{\xi_{ni}}^{\xi_{ni+1}}\int_{\xi_{ni}}^{x}[G''_n(u)-G''_n(\xi_{ni})]\,du\,dx=G_n(\xi_{nk+1})-$$

$$-G_n(\xi_{n0})-J_1-J_{nk}-J_2-J_3-J_4-J_5-R_n.$$

$$|R_n|\xrightarrow{P}0,\quad n\to\infty, \tag{35}$$

$$\sup_k |J_i|\xrightarrow{P}0,\quad n\to\infty,\quad i=\overline{1,5}, \tag{36}$$

в силу условий теоремы 2. Показано это может быть точно таким же методом, что и при доказательстве теоремы 1. Например,

$$\sup_k |J_1|=\sup_k\left|2K_N\sum_{i=0}^{k} f'_n(\xi_{ni})[\alpha_{ni}-a_n(\xi_{ni})]\Delta t_{ni}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_k |I_1|\xrightarrow{P}0,\quad n\to\infty.$$

Поэтому

$$\sum_{i=0}^{k} g_n(\xi_{ni})\Delta t_{ni}=G_n(\xi_{nk+1})-G_n(\xi_{n0})-\sum_{i=0}^{k} G'_n(\xi_{ni})\beta_{ni}\omega_{ni}-o(1),$$

$$o(1) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Следовательно,

$$\sum_{i=0}^{k} g_n(\xi_{ni}) \Delta t_{ni} = G_n(\xi_{nk+1}) - G_n(\xi_{n0}) - \sum_{i=0}^{k} G'_n(\xi_{ni}) \sigma_n(\xi_{ni}) \omega_{ni} - o(1),$$

поскольку

$$\sup_k \left| \sum_{i=0}^{k} G'_n(\xi_{ni}) [\beta_{ni} - \sigma_n(\xi_{ni})] \omega_{ni} \right| \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty, \tag{37}$$

в силу тех же соображений, что и при доказательстве теоремы 1. Далее доказательство совпадает с доказательством теоремы 2 [2]. В самом деле, случайная ломаная $\eta_n(t)$ представима в виде

$$\eta_n(t) = \sum_{i=0}^{k}{}' g_n(\xi_{ni}) \Delta t_{ni} + [t - t_{nk}] g_n(\xi_{nk}) = G_n(\hat{\zeta}_n(t)) -$$

$$- G_n(\hat{\zeta}_n(0)) + G_n(\hat{\zeta}_n(t_{nk+1})) - G_n(\hat{\zeta}_n(t)) - \int_0^t G'_n(\hat{\zeta}_n(s)) \times$$

$$\times \sigma_n(\hat{\zeta}(s)) dw_n(s) - (J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5 + \sum_{i=0}^{k} G'_n(\xi_{ni}) \times$$

$$\times [\beta_{ni} - \sigma_n(\xi_{ni})] \omega_{ni}) - [t - t_{nk}] g(\xi_{nk}), \quad t \in [t_{nk}, t_{nk+1}].$$

Учитывая (36) и (37), получаем

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| \eta_n(t) - G_n(\hat{\zeta}_n(t)) - G_n(\hat{\zeta}_n(0)) - \int_0^t G'_n(\hat{\zeta}_n(s)) \times \right.$$

$$\left. \times \sigma_n(\hat{\zeta}_n(s)) dw_n(s) \right| \xrightarrow{P} 0, \quad n \to \infty,$$

причем $\hat{\zeta}_n(t) = \varphi_n(\zeta_n(t))$.

Поэтому (см. [2] доказательство теоремы 2):

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} \left| \eta_{n'}(t) - 2 \int_{\zeta(0)}^{\zeta(t)} g(u) du - 2 \int_0^t g(\zeta(s)) d\zeta(s) \right| \xrightarrow{P} 0, \quad n' \to \infty.$$

Из произвольности последовательности n' следует доказательство теоремы.

В заключение автор приносит благодарность Г. Л. Кулиничу за помощь при работе над настоящей статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скороход А. В., Исследования по теории случайных процессов, Киев, 1961.
2. Кулинич Г. Л., В сб.: Теория вероятностей и математическая статистика, вып. 12, Киев, 1975.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 15/I 1976

Jelena ROOS

SUVALISELT MUUTUVATE ÜHEMÕÕTMELISTE JUHUSLIKE SUURUSTE SEERIATE JADA PIIRTEOREEMID

Esitatakse juhuslike suuruste seeria koondumise piisavad tingimused, mis on rakendatavad katkevate kordajate difusiooniprotsessis, ning tingimused, mille alusel seeriate jada teatud klassi funktsionaalid koonduvad piirprotsessist teatud funktsionaaliks.

Yelena ROOS

LIMIT THEOREMS FOR SEQUENCE OF SERIES OF ONE-DIMENSIONAL RANDOM VARIABLES WITH ARBITRARY DEPENDENCE CHARACTER

In the paper the convergence of sequences of one-dimensional random variables with arbitrary dependence character to diffusion process with discontinuous coefficients is investigated. The convergence of some class of functionals dependent on sequence of series to some functionals of the limit process is studied.