

М. ЛЕВИН

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ФУНКЦИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ И КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

В работе доказываются утверждения, позволяющие для ряда классов функций получать наилучшие кубатурные формулы. В основе рассуждений лежит следующая известная [1]

Теорема 1. Пусть заданы гильбертово пространство H со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_H$, линейно независимые функции $\pi_1, \dots, \pi_N \in H$. Для заданной функции $f \in H$ существует единственный набор чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ (обозначим их через $\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*$), для которых величина

$$\|f - \sum_{k=1}^N \lambda_k \pi_k\|_H$$

достигает наименьшего значения (обозначим его через δ). Числа $\lambda_1^*, \dots, \lambda_N^*$ являются единственным решением системы

$$\sum_{k=1}^N \lambda_k (\pi_k, \pi_j)_H = (f, \pi_j)_H \quad (j=1, \dots, N)$$

и

$$\delta^2 = \|f\|_H^2 - \sum_{k=1}^N \lambda_k^* (f, \pi_k)_H.$$

Введем обозначения. Пусть H_1 — гильбертово пространство функций $\varphi(z)$, рассматриваемых на множестве $z \in E_1$, в котором задано скалярное произведение $(\alpha(z), \gamma(z))_{H_1}$; H_2 — гильбертово пространство функций $\psi(w)$, определенных на множестве $w \in E_2$, со скалярным произведением $(\beta(w), \mu(w))_{H_2}$; H_3 — гильбертово пространство функций $f(z, w)$, определенных на множестве $E_1 \times E_2$, со скалярным произведением $(f_1, f_2)_{H_3}$, удовлетворяющим условию

$$(\alpha(z)\beta(w), \gamma(z)\mu(w))_{H_3} = (\alpha(z), \gamma(z))_{H_1} (\beta(w), \mu(w))_{H_2}. \quad (1)$$

Пусть $m, n, v_{11}, \dots, v_{1m}, v_{21}, \dots, v_{2n}$ заданы. Функции $K_{1i}(z, u)$, $K_{2j}(w, v)$ ($i, j = 1, 2, \dots$) считаем заданными такими, что для любых $u \in E_1, v \in E_2$ имеем

$$K_{1i}(z, u) \in H_1, \quad K_{2j}(w, v) \in H_2 \quad (i, j = 1, 2, \dots),$$

а векторы $\bar{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $\bar{v} = (v_1, \dots, v_n)$ — такими, что множества

$$\{K_{11}(z, u_1), \dots, K_{1\nu_{11}}(z, u_1), \dots, K_{11}(z, u_m), \dots, K_{1\nu_{1m}}(z, u_m)\},$$

$$\{K_{21}(\omega, v_1), \dots, K_{2\nu_{21}}(\omega, v_1), \dots, K_{21}(\omega, v_n), \dots, K_{2\nu_{2n}}(\omega, v_n)\} \quad (2)$$

состоят из линейно независимых функций.

Через $A_{ki}(\bar{u})$ и $B_{lj}(\bar{v})$ ($k = 1, \dots, m$; $i = 1, \dots, \nu_{1k}$; $l = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, \nu_{2l}$) обозначим значения A_{ki} и B_{lj} , для которых при заданных \bar{u} и \bar{v} величины

$$\|\varphi(z) - \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\nu_{1k}} A_{ki} K_{ki}(z, u_k)\|_{H_1}, \quad \|\psi(\omega) - \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{\nu_{2l}} B_{lj} K_{2j}(\omega, v_l)\|_{H_2} \quad (3)$$

достигают наименьших значений (соответственно $\delta_1(\bar{u})$ и $\delta_2(\bar{v})$).

По теореме 1 числа $A_{ki}(\bar{u})$ удовлетворяют равенствам

$$\sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\nu_{1k}} A_{ki}(\bar{u}) (K_{ki}(z, u_k), K_{1p}(z, u_k))_{H_1} = (\varphi, K_{1p}(z, u_k))_{H_1}$$

$$(\lambda = 1, \dots, m; p = 1, \dots, \nu_{1\lambda}) \quad (4)$$

и

$$\delta_1^2(\bar{u}) = \|\varphi\|_{H_1}^2 - \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\nu_{1k}} A_{ki}(\bar{u}) (\varphi, K_{ki}(z, u_k))_{H_1}; \quad (5)$$

а числа $B_{lj}(\bar{v})$ — равенствам

$$\sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{\nu_{2l}} B_{lj}(\bar{v}) (K_{2j}(\omega, v_l), K_{2q}(\omega, v_s))_{H_2} = (\psi, K_{2q}(\omega, v_s))_{H_2}$$

$$(s = 1, \dots, n; q = 1, \dots, \nu_{2s}) \quad (6)$$

и

$$\delta_2^2(\bar{v}) = \|\psi\|_{H_2}^2 - \sum_{l=1}^n \sum_{j=1}^{\nu_{2l}} B_{lj}(\bar{v}) (\psi, K_{2j}(\omega, v_l))_{H_2}. \quad (7)$$

Теорема 2. Пусть $\varphi \in H_1$, $\psi \in H_2$, \bar{u} , \bar{v} заданы, множества (2) состоят из линейно независимых функций. Тогда величина

$$\|\varphi(z)\psi(\omega) - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{\nu_{1k}} \sum_{j=1}^{\nu_{2l}} C_{kl}^{(i,j)} K_{ki}(z, u_k) K_{2j}(\omega, v_l)\|_{H_3} \quad (8)$$

достигает наименьшего значения при единственных

$$C_{kl}^{(i,j)} = A_{ki}(\bar{u}) B_{lj}(\bar{v})$$

$$(k = 1, \dots, m; i = 1, \dots, \nu_{1k}; l = 1, \dots, n; j = 1, \dots, \nu_{2l}), \quad (9)$$

и это значение равно

$$\mu(\bar{u}, \bar{v}) = [\|\varphi\|_{H_1}^2 \|\psi\|_{H_2}^2 - (\|\varphi\|_{H_1}^2 - \delta_1^2(\bar{u})) (\|\psi\|_{H_2}^2 - \delta_2^2(\bar{v}))]^{1/2}. \quad (10)$$

Доказательство. По теореме 1 числа $C_{kl}^{(i,j)}$, доставляющие величине (8) наименьшее значение, являются единственным решением системы

$$\sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{v_{1k}} \sum_{j=1}^{v_{2l}} C_{kl}^{(i,j)} (K_{1i}(z, u_k) K_{2j}(\omega, v_l), K_{1p}(z, u_\lambda) K_{2q}(\omega, v_s))_{H_3} = \\ = (\varphi\psi, K_{1p}(z, u_\lambda) K_{2q}(\omega, v_s))_{H_3} \\ (\lambda=1, \dots, m; p=1, \dots, v_{1\lambda}; s=1, \dots, n; q=1, \dots, v_{2s}).$$

Если эту систему переписать, учитывая свойство (1), а также равенства (4) и (6), то станет очевидным, что ей удовлетворяют числа (9). По теореме 1 имеем, что

$$\mu^2(\bar{u}, \bar{v}) = \|\varphi\psi\|_{H_3}^2 - \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{i=1}^{v_{1k}} \sum_{j=1}^{v_{2l}} A_{ki}(\bar{u}) B_{lj}(\bar{v}) (\varphi\psi, K_{1i}(z, u_k) K_{2j}(\omega, v_l))_{H_3},$$

откуда по (1), (5) и (7) следует (10), и этим теорема доказана.

Теперь рассмотрим величины $\delta_1(\bar{u})$ и $\delta_2(\bar{v})$ как функции от \bar{u} и \bar{v} . При этом через $\delta_1(\bar{u})$ и $\delta_2(\bar{v})$ обозначаем наименьшие значения величин (3) при фиксированных \bar{u} и \bar{v} и не требуем линейной независимости функций (2). Пусть $u_1, \dots, u_m \in E_1$, $v_1, \dots, v_n \in E_2$, $\bar{u}^* = (u_1^*, \dots, u_m^*)$, $\bar{v}^* = (v_1^*, \dots, v_n^*)$, множества (2) при $\bar{u} = \bar{u}^*$, $\bar{v} = \bar{v}^*$ состоят из линейно независимых функций и векторы \bar{u}^* и \bar{v}^* доставляют величинам $\delta_1(\bar{u})$ и $\delta_2(\bar{v})$ наименьшие значения.

Теорема 3. Числа

$$u_k = u_k^*, v_l = v_l^*, C_{kl}^{(i,j)} = A_{ki}(\bar{u}^*) B_{lj}(\bar{v}^*) \\ (k=1, \dots, m; l=1, \dots, n; i=1, \dots, v_{1k}; j=1, \dots, v_{2l})$$

доставляют величине (8) как функции от $u_k, v_l, C_{kl}^{(i,j)}$ ($k=1, \dots, m; i=1, \dots, v_{1k}; l=1, \dots, n; j=1, \dots, v_{2l}$) наименьшее значение, равное $\mu(\bar{u}^*, \bar{v}^*)$.

Доказательство. По определению

$$0 \leq \delta_1(\bar{u}) \leq \|\varphi\|_{H_1}, \quad 0 \leq \delta_2(\bar{v}) \leq \|\psi\|_{H_2}.$$

Поэтому из (10) следует, что величина $\mu(\bar{u}, \bar{v})$ принимает как функция от \bar{u}, \bar{v} наименьшее значение при $\delta_1(\bar{u}) = \delta_1(\bar{u}^*)$, $\delta_2(\bar{v}) = \delta_2(\bar{v}^*)$. Но тогда по теореме 2 числа $C_{kl}^{(i,j)}$, для которых это значение достигается, равны $A_{ki}(\bar{u}^*) B_{lj}(\bar{v}^*)$, что и доказывает теорему.

Рассмотрим использование этих результатов для построения наилучших кубатурных формул (с прямоугольной сеткой узлов) на заданных классах функций.

Введем в рассмотрение классы функций. Пусть число $M > 0$ задано. Через $W^{(r_i)}L_2$ обозначим класс всех функций $f(x)$, которые на отрезке $[0, 1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $r_i - 1$ и производную порядка r_i , для которой

$$\int_0^1 |f^{(r_i)}(x)|^2 dx \leq M.$$

Пусть $L_{ij}y = 0$ ($j=1, \dots, r_i$) — линейные однородные краевые условия такие, что задача

$$\left. \begin{aligned} y^{(r_i)} &= 0 \\ L_{ij}y &= 0 \quad (j=1, \dots, r_i) \end{aligned} \right\}$$

имеет функцию Грина, которую обозначим через $g_i(x, t)$; $i=1, 2$. Через $W_{g_i}^{(r_i)}L_2$ обозначим класс всех функций $f(x)$, принадлежащих классу $W_{g_i}^{(r_i)}L_2$ и удовлетворяющих условиям $L_{ij}f=0$ ($j=1, \dots, r_i$). Частными случаями таких классов являются, например, широко известные классы $W_0^{(r)}L_2$, $W_{01}^{(2r)}L_2$ [2]. Если $f(x) \in W_{g_i}^{(r_i)}L_2$, то имеет место интегральное представление

$$f(x) = \int_0^1 f^{(r_i)}(t) g_i(x, t) dt. \quad (11)$$

Квадратурная формула

$$\int_0^1 p_i(x) f(x) dx = \sum_{h=1}^{n_i} \sum_{j=0}^{p_{i,h}} A_{hj} f^{(j)}(x_h) + R_{n_i}(f), \quad (12)$$

где $p_i(x)$ суммируема на $[0, 1]$, $q_{i,1}, \dots, q_{i,n_i} < r_i$, называется, согласно С. М. Никольскому [2], наилучшей на классе $W_{g_i}^{(r_i)}L_2$, если ее веса и узлы A_{hj}, x_h ($h=1, \dots, n_i$; $j=0, \dots, q_{i,h}$) выбраны так, что величина

$$R_{n_i} = \sup_{j \in W_{g_i}^{(r_i)}L_2} |R_{n_i}(f)|$$

имеет наименьшее значение.

Воспользовавшись известной методикой [2], легко получим, что

$$R_{n_i} = M d_i,$$

где

$$d_i = \left[\int_0^1 \left| \int_0^1 p_i(x) g_i(x, t) dx - \sum_{h=1}^{n_i} \sum_{j=0}^{p_{i,h}} A_{hj} \frac{\partial^j}{\partial x^j} g_i(x_h, t) \right|^2 dt \right]^{1/2}. \quad (13)$$

Через $W_{g_1, g_2}^{(r_1, r_2)}L_2$ обозначим класс всех функций $f(x, y)$, которые на квадрате $0 \leq x, y \leq 1$ имеют непрерывные производные $f^{(i+j)}(x, y)$ ($i < r_1, j < r_2$), кусочно непрерывные производные $f^{(r_1+j)}(x, y)$, $f^{(i+r_2)}(x, y)$ ($j=0, \dots, r_2$; $i=0, \dots, r_1$), удовлетворяют по переменной x краевым условиям

$$L_{1j}f \equiv 0 \quad (j=1, \dots, r_1),$$

по переменной y — краевым условиям

$$L_{2j}f \equiv 0 \quad (j=1, \dots, r_2)$$

и неравенству

$$\left[\int_0^1 \int_0^1 |f^{(r_1+r_2)}(x, y)|^2 dx dy \right]^{1/2} \leq M^*.$$

Функции этого класса допускают представление

$$f(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 f^{(r_1+r_2)}(t, v) g_1(x, t) g_2(y, v) dt dv. \quad (14)$$

* Мы пользуемся обозначением

$$f^{(p+q)}(x, y) = \frac{\partial^{p+q}}{\partial x^p \partial y^q} f(x, y).$$

Кубатурная формула

$$\int_0^1 \int_0^1 p_1(x) p_2(y) f(x, y) dx dy = \sum_{h=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \sum_{i=0}^{\rho_{1,h}} \sum_{j=0}^{\rho_{2,l}} A_{hl}^{(i,j)} f^{(i+j)}(x_h, y_l) + R_{n_1 n_2}(f) \quad (15)$$

называется наилучшей на классе $W_{g_1 g_2}^{(r_1, r_2)} L_2$, если ее узлы (x_h, y_l) и веса $A_{hl}^{(i,j)}$ выбраны так, что величина

$$R_{n_1 n_2} = \sup_{f \in W_{g_1 g_2}^{(r_1, r_2)} L_2} |R_{n_1 n_2}(f)|$$

принимает наименьшее значение.

Подставляя (14) в (15), получаем, как и в одномерном случае, что

$$R_{n_1 n_2} = Md,$$

где

$$d = \left[\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 p_1(x) p_2(y) g_1(x, t) g_2(y, v) dx dy - \sum_{h=1}^{n_1} \sum_{l=1}^{n_2} \sum_{i=0}^{\rho_{1,h}} \sum_{j=0}^{\rho_{2,l}} A_{hl}^{(i,j)} \left| \frac{\partial^i}{\partial x^i} g_1(x_h, t) \frac{\partial^j}{\partial y^j} g_2(y_l, v) \right|^2 dt dv \right]^{1/2}. \quad (16)$$

Следовательно, задача построения наилучшей формулы (15) на $W_{g_1 g_2}^{(r_1, r_2)} L_2$ сводится к минимизации величины (16) по узлам и весам, что можно сделать с помощью теоремы 3.

Пусть для каждого $i = 1, 2$ на классе $W_{g_i}^{(r_i)} L_2$ наилучшая формула (12) имеет узлы $x_{i,h}$ ($k = 1, \dots, n_i$) (различные и принадлежащие отрезку $[0, 1]$), веса $A_{hj}^{(i)}$ ($k = 1, \dots, n_i; j = 0, \dots, \rho_{i,h}$) и оценку остатка $R_{n_i} = M \bar{d}_i$.

Обозначим

$$\varphi_i = \left[\int_0^1 \int_0^1 p_i(x) g_i(x, t) dx \right]^2 dt \Big|^{1/2}.$$

Теорема 4. Наилучшая на классе $W_{g_1 g_2}^{(r_1, r_2)} L_2$ кубатурная формула (15) имеет узлы и веса

$$x_h = x_{1,h}; \quad y_l = x_{2,l}; \quad A_{hl}^{(i,j)} = A_{hi}^{(1)} A_{lj}^{(2)} \quad (k=1, \dots, n_i; i=0, \dots, \rho_{1,h}; l=1, \dots, n_2; j=0, \dots, \rho_{2,l}) \quad (17)$$

и оценку остатка

$$R_{n_1 n_2} = M [\varphi_1^2 \varphi_2^2 - (\varphi_1^2 - \bar{d}_1^2) (\varphi_2^2 - \bar{d}_2^2)]^{1/2}. \quad (18)$$

Доказательство получается сразу, если заметить, что к величине (16) применима теорема 3, по которой наименьшее значение этой величине доставляют числа (17). Выражение наименьшего значения (16) через наименьшие значения (13) согласно теореме 3 приводит к значению (18).

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема позволяет сразу выписать наилучшую кубатурную формулу на классе $W_{g_1 g_2}^{(r_1, r_2)} L_2$, если известны наилучшие квадратурные формулы на классах $W_{g_1}^{(r_1)} L_2$. Аналоги этой теоремы были получены в [3, 4]. Из этой теоремы как частные случаи следуют некоторые ранее полученные результаты (напр., [5, 4]). Теорема 4 является следствием теоремы 3. Последняя может быть успешно использована и при построении наилучших кубатурных формул на классах функций, не подчиненных краевым условиям (см., напр., [6]).

Доказательство теоремы 3 не изменится, если в (8) (и, естественно, в (3)) некоторые узлы считать фиксированными (напр., $u_1 = 1 - u_m = v_1 = 1 - v_n = 0$ при $E_1 = E_2 = [0, 1]$). Но тогда при некоторых фиксированных узлах сохраняет силу и теорема 4, и, следовательно, с ее помощью можно получить и такие результаты, как, например, результаты работ [7, 8].

Рассмотрим в виде примера один частный случай теоремы 4. Пусть $W_{01}^{(2)} L_2$ означает класс функций $f(x)$, которые на $[0, 1]$ имеют абсолютно непрерывную производную и удовлетворяют условиям $f(0) = f(1) = 0$, $[\int_0^1 |f''(x)|^2 dx]^{1/2} \leq M$.

Пусть $W_{01}^{(2,2)} L_2$ означает класс функций $f(x, y)$, которые имеют конечно непрерывные производные $f_{x^i y^j}^{(i+j)}(x, y)$ ($i, j = 0, 1, 2$) на квадрате $0 \leq x, y \leq 1$ и удовлетворяют условиям

$$[\int_0^1 \int_0^1 |f_{x^2 y^2}^{(4)}(x, y)|^2 dx dy]^{1/2} \leq M, \quad (19)$$

$$f(0, y) \equiv f(1, y) \equiv f(x, 0) \equiv f(x, 1) \equiv 0. \quad (20)$$

По теореме 4 для того, чтобы получить наилучшую кубатурную формулу на $W_{01}^{(2,2)} L_2$, надо повторно применить наилучшую квадратурную формулу на $W_{01}^{(2)} L_2$. Воспользовавшись результатом работы [9], получим следующее утверждение: на классе $W_{01}^{(2,2)} L_2$ наилучшая формула

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \sum_{h=1}^m \sum_{l=1}^n A_{hl} f(x_h, y_l) + R_{mn}(f)$$

имеет узлы

$$x_h = 2h \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + k - 1 \right), \quad y_l = 2g \left(\sqrt{\frac{2}{3}} + l - 1 \right)$$

$$(k=1, \dots, m; \quad l=1, \dots, n),$$

веса

$$A_{hl} = 4hg,$$

$$A_{ll} = A_{ml} = A_{h1} = A_{kn} = 2gh \left(\frac{5}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} + 1 \right)$$

$$(k=2, \dots, m-1; \quad l=2, \dots, n-1),$$

$$A_{11} = A_{1n} = A_{m1} = A_{mn} = gh \left(\frac{5}{4} \sqrt{\frac{2}{3}} + 1 \right)^2$$

и оценку остатка

$$\sup_{f \in W_{01}^{(2,2)} L_2} |R_{mn}(f)| = \frac{M}{60} \sqrt{\frac{2}{3} (h^4 + g^4)} - \frac{16}{9} h^4 g^4.$$

Здесь

$$h = 0,5 \left(2 \sqrt{\frac{2}{3}} + m - 1 \right)^{-1}, \quad g = 0,5 \left(2 \sqrt{\frac{2}{3}} + n - 1 \right)^{-1}.$$

Отметим, что теоремы 2—4 легко переносятся и на функции произвольного числа переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М., 1965.
2. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1974.
3. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 19, 499 (1970).
4. Левин М., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Матем. и теор. мех., VI, 75 (1971).
5. Шац Э., Изв. АН БССР, Физ. Матем., № 3, 68 (1970).
6. Соман Gh., Stud. Univ. Babeş-Bolyai, Ser. math.-mech., 18, 41 (1973).
7. Соман Gh., Micula Gh., Rend. mat., 4, 303 (1971).
8. Лушпай Н. Е., Сб. работ асп. ДГУ (матем. и мех.), Днепропетровск, 1972, с. 35.
9. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 249 (1969).

Таллинский политехнический
институт

Поступила в редакцию
2/III 1976

M. LEVIN

FUNKTSIOONIDE APROKSIMEERIMISEST HILBERTI RUUMIS JA KUBATUURVALEMIST

Kordajad $C_{hl}^{(i,j)}$ ja sõlmed (u_h, v_l) on valitud nii, et suuruse (8) (tingimusel (1)) väärtus oleks minimaalne.

Defineeritakse funktsioonide $f(x, y)$ hulk, mis rahuldab tingimusi

$$\|f^{(r_1+r_2)}(x, y)\|_{L_2[0,1;0,1]} \leq M \quad \text{ja} \quad (14).$$

Sellele hulcale on leitud parim valem (15), s. t. valem (15) kordajad ja sõlmed on valitud nii, et $R_{n_1 n_2}$ omaks vähimat väärtust.

M. LEVIN

ON THE APPROXIMATION IN HILBERT SPACE AND CUBATURE FORMULAE

The coefficients $C_{hl}^{(i,j)}$ and knots (u_h, v_l) are chosen to minimize the value (8). It is shown that the solution of this problem can be obtained (under condition (1)) by minimizing the values (3).

Let us consider classes of functions $f(x, y)$ satisfying the conditions (14) and

$$\|f^{(r_1+r_2)}(x, y)\|_{L_2[0,1;0,1]} \leq M.$$

The best formula (15) is found for these classes. In other words, the coefficients and knots of formula (15) are chosen to minimize the value $R_{n_1 n_2}$.