

Ю. ЭНГЕЛЬБРЕХТ

О ВОЛНАХ ПОСТОЯННОГО ПРОФИЛЯ В ВЯЗКОУПРУГИХ МАТЕРИАЛАХ

Проблемы возникновения и роста одномерных ударных волн в диссипативных средах изучались во многих работах [1-13], однако в большинстве из них [1-9] исследовался только один вид деформации для определенного материала. В настоящей работе эти результаты обобщаются для произвольной деформации и формулируются общие условия существования одномерной волны постоянного профиля. Математическая модель выводится на основе нелинейной теории вязкоупругости.

В нелинейной диссипативной среде одномерная ударная волна описывается уравнением

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon B (\varepsilon_x + \Lambda), \quad (1)$$

где ε — амплитуда ударной волны, распространяющейся в недеформированную среду, B — коэффициент, определяющий упругие свойства материала, Λ — критический градиент деформации, $\varepsilon_x = \partial\varepsilon/\partial X$, t — время, X — лагранжева координата. Сравнение Λ с ε_x позволяет определить условия нарастания и затухания ударной волны. В самом общем виде это можно выразить так: амплитуда ударной волны возрастает, остается постоянной или уменьшается согласно выполнению условий

$$B (\varepsilon_x + \Lambda) > 0, \quad (2)$$

$$B (\varepsilon_x + \Lambda) = 0, \quad (3)$$

$$B (\varepsilon_x + \Lambda) < 0. \quad (4)$$

В [1, 4, 6, 9-11] такие результаты получены для вязкоупругого, в [5, 7-9, 12] — для термовязкоупругого и автором на основе математической модели [14] — для нелинейного термоупругого материала*.

Условие (3) соответствует волнам постоянного профиля. В этом случае нелинейные и диссипативные эффекты уравновешены и решение автомодельно. Рассмотрим возможность существования таких волн при разных свойствах среды, следуя [8], где исследовалась только ударная волна сжатия в одном определенном материале.

Предположим, что компонент тензора псевдонапряжения Лагранжа $\sigma_{11} = \sigma$ в момент времени t зависит от истории деформации ε^t

$$\sigma(t) = S(\varepsilon^t), \quad (5)$$

где $\varepsilon^t(s) = \varepsilon(t-s)$, $0 \leq s < \infty$.

* Доклад автора на XIII научном совещании по тепловым напряжениям в элементах конструкций, Канев, 1974.

Используем из [8] определение для изменения напряжения:

$$S(\varepsilon^t + \gamma^t) = S(\varepsilon^t) + G(0)\gamma^t(0) + \int_0^\infty G'(s)\gamma^t(s)ds + O\|\gamma^t\|, \quad (6)$$

где $\varepsilon^t + \gamma^t$ — реакция на произвольное изменение деформации, наложенное на предыдущую историю ε^t ; $G(s)$ — функция релаксации напряжения; $G'(s) = dG(s)/ds$.

Определим мгновенные параметры материала при истории

$$\varepsilon_I(s) = \begin{cases} \varepsilon & \text{при } s=0, \\ 0 & \text{при } s>0. \end{cases} \quad (7)$$

Тогда напряжение зависит только от скачка деформации и величину

$$\sigma_I(\varepsilon) = S(\varepsilon_I) \quad (8)$$

можно считать мгновенным напряжением. Мгновенные модули упругости второго и третьего порядков определяются по аналогии с нелинейной теорией упругости соответственно в виде

$$E_I = \frac{d\sigma_I(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \quad E_I^* = \frac{d^2\sigma_I(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}. \quad (9)$$

Отметим, что

$$E_I(\varepsilon) = G(0). \quad (10)$$

В равновесном состоянии напряжение

$$\sigma_E(\varepsilon) = S(\varepsilon_E) \quad (11)$$

определяется при равновесной истории соотношением

$$\varepsilon_E(s) = s, \quad 0 \leq s < \infty, \quad (12)$$

а соответственные равновесные модули второго и третьего порядков — соотношениями

$$E_E = \frac{d\sigma_E(\varepsilon)}{d\varepsilon}, \quad E_E^* = \frac{d^2\sigma_E(\varepsilon)}{d\varepsilon^2}. \quad (13)$$

Предполагаем, что

$$\sigma_I(0) = \sigma_E(0) = 0. \quad (14)$$

Мгновенная и равновесная скорости звука вычисляются по формулам:

$$Q_0(C_I)_0^2 = \left. \frac{d\sigma_I(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}, \quad Q_0(C_E)_0^2 = \left. \frac{d\sigma_E(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}. \quad (15)$$

Из второго закона термодинамики вытекает [8] выполнимость

$$C_I > C_E. \quad (16)$$

В случае пренебрежения диссипативными эффектами из (5) и (6) получаем конституционное уравнение нелинейной теории упругости в виде

$$\sigma = E_I \varepsilon + E_I^* \varepsilon^2, \quad E_I = E_E, \quad E_I^* = E_E^*. \quad (17)$$

Приступим теперь к анализу ударной волны постоянного профиля, которая описывается условием (3). Такая волна может быть представлена соотношением

$$u(X, t) = u(\xi), \quad (18)$$

где $\xi = t - XV^{-1}$, $V > 0$ — скорость распространения волны постоянного профиля (автомодельной волны), u — кусочно-непрерывная функция. Из закона сохранения импульса следует

$$\sigma(\xi) = \rho_0 V^2 \varepsilon(\xi). \quad (19)$$

Волна постоянного профиля реализуется равновесием между стремлением к «опрокидыванию» в результате влияния нелинейности и диссипацией. Из (19) очевидно, что каждая точка волны постоянного профиля на плоскости $\sigma - \varepsilon$ находится на линии, соединяющей начальную и конечную точки напряженного состояния. Эта линия с наклоном $\rho_0 V^2$ называется линией Релея. Местоположение линии Релея R позволяет определить тип волны и реальность существования волны вообще.

Из физических соображений следует

$$|\sigma_I(\varepsilon)| > |\sigma_E(\varepsilon)|, \quad E_I(\varepsilon) > E_E(\varepsilon) > 0. \quad (20)$$

По аналогии с нелинейной теорией упругости можно определить два вида материала:

$$A. \quad E_I^*(\varepsilon) > 0, \quad E_E^*(\varepsilon) > 0; \quad (21)$$

$$B. \quad E_I^*(\varepsilon) < 0, \quad E_E^*(\varepsilon) < 0. \quad (22)$$

Рассмотрим волны, для которых ε является монотонной функцией от ξ . Из монотонности ε следуют монотонности C_I и C_E . Возможны три типа волн, которые соответствуют условиям

$$(C_I)_0 > V > C_E, \quad (23)$$

$$(C_I)_0 = V, \quad (24)$$

$$(C_I)_0 < V. \quad (25)$$

Предположение о выполнимости

$$V < C_E \quad (26)$$

физически невозможно, так как в этом случае диссипация и нелинейность влияют в одну сторону. В отличие от [1-12] проанализируем поведение обоих материалов (21) и (22) при деформации разного знака. Это позволит представить теорию одномерных волн постоянного профиля с единой точки зрения и обобщить теоремы существования волн.

A. Выполняется условие (21). Кривые $\sigma_I(\varepsilon)$ и $\sigma_E(\varepsilon)$ изображены на рис. 1, а.

Пусть $\varepsilon > 0$. Линия Релея может иметь три разных положения. Линия R_1 соответствует условию (23), решение представляет собой гладкую волну с соблюдением

$$\rho_0 V^2 \varepsilon(\infty) = \sigma_E(\varepsilon(\infty)), \quad (27)$$

профиль ее показан на рис. 2, а. Линия R_2 соответствует условию (24) и служит касательной к кривой σ_I , решение представляет собой волну ускорения с соблюдением условия (27), ее профиль изображен на рис. 2, б. Линия R_3 соответствует условию (25), ее наклон больше начального наклона кривой σ_I , решение является прерывным и в точке $\xi = 0$ соблюдается условие

$$\rho_0 V^2 \varepsilon(0) = \sigma_I(\varepsilon(0)). \quad (28)$$

В следующих точках $\xi > 0$ выполняется условие (27). Профиль волны изображен на рис. 2, в.

Пусть теперь $\varepsilon < 0$. Соединим произвольную точку равновесного состояния с начальной точкой (см. рис. 1, а). Соответствие линии R_4

условию (26) очевидно, следовательно, в материале (21) волна сжатия постоянного профиля физически невозможна.

Б. Выполняется условие (22). Кривые $\sigma_I(\varepsilon)$ и $\sigma_E(\varepsilon)$ нанесены на рис. 1, б.

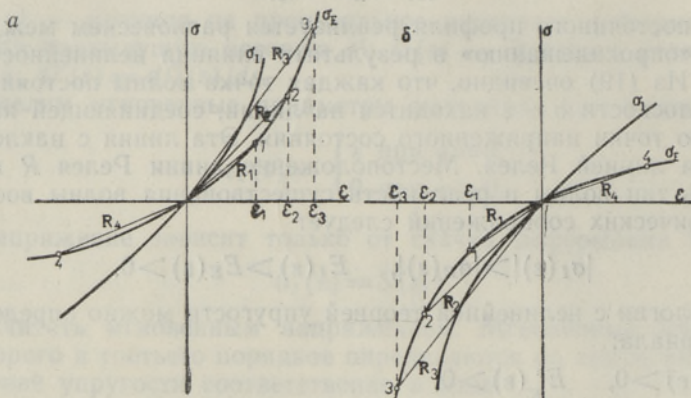


Рис. 1.

Пусть $\varepsilon < 0$. Возможно построение только одной линии R_4 , соответствующей условию (26). Таким образом, в материале (22) волна растяжения постоянного профиля физически нереальна.

Пусть $\varepsilon < 0$. Имеем снова три положения линии Релея R_1, R_2, R_3 , характеристики которых аналогичны описанным в пункте А. Три возможных в материале (22) типа волн показаны на рис. 2.

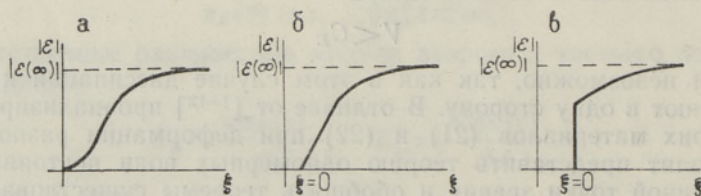


Рис. 2.

Следовательно, волны постоянного профиля существуют в определенных материалах только при выполнении специальных условий относительно материала и вида деформации. Изложенное выше позволяет обобщить теорему Гринберга [2] для данного случая:

Теорема. Пусть функционал напряжения (6) удовлетворяет условию (21) (условию (22)) и условиям гладкости. Тогда существование волны постоянного профиля возможно при $\varepsilon > 0$ (при $\varepsilon < 0$) и невозможно при $\varepsilon < 0$ (при $\varepsilon > 0$).

Следствие. Волна постоянного профиля является непрерывной при $(C_I)_0 > V > C_E$, волной ускорения при $(C_I)_0 = V$ и прерывной при $(C_I)_0 < V$.

Отметим, что всегда выполняется $|\varepsilon_3| > |\varepsilon_2| > |\varepsilon_1|$, где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — амплитуды непрерывной волны, волны ускорения и прерывной волны соответственно. Это иллюстрирует рис. 1.

Доказательство теоремы для условия (22) приведено Дж. М. Гринбергом [2], доказательство в случае условия (21) аналогично. Сущест-

вание волн постоянного профиля в вязкоупругих материалах доказано и экспериментально [4, 6, 10]. Подбор функций $G(s)$ и $G'(s)$ для полиметилметакрилата представлен в [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Greenberg J. M., Arch. Rat. Mech. Anal., **24**, 1 (1967).
2. Greenberg J. M., Quart. Appl. Math., **26**, 27 (1968).
3. Schuler K. W., J. Mech. Phys. Solids, **18**, 277 (1970).
4. Шулер К., Уолш Э., Прикл. мех., Тр. Америк. об-ва инж.-механ., **38**, 62 (1971).
5. Chen P. J., Gurtin M. E., ZAMP, **23**, 69 (1972).
6. Чен П., Гуртин М., Прикл. мех., Тр. Америк. об-ва инж.-механ., **39**, 143 (1972).
7. Nunziato J. W., Hermann W., Arch. Rat. Mech. Anal., **47**, 272 (1972).
8. Schuler K. W., Nunziato J. W., Walsh E. K., Int. J. Solids Structures, **9**, 1237 (1973).
9. Nunziato J. W., Walsh E. K., Int. J. Solids Structures, **9**, 1373 (1973).
10. Varley E., Rogers T. G., Proc. Roy. Soc. London, **296A**, 498 (1967).
11. Chen P. J., Gurtin M. E., Arch. Rat. Mech. Anal., **36**, 33 (1970).
12. Dunwoody J., Arch. Rat. Mech. Anal., **50**, 278 (1973).
13. Swan G. W., Duvall G. E., Thornhill C. K., J. Mech. Phys. Solids, **21**, 215 (1973).
14. Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К., Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел, Таллин, 1972.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
12/XI 1974

J. ENGELBRECHT

STATSIONAARSE PROFIIILIGA LAINED VISKOELASTSETES MATERJALIDES

Esitatakse statsioonarse profiiliga deformatsioonilainete teooria üldistatud käsitlus kaht tüüpi materjalide korral, kusjuures on piiratud ühemõõtmelise deformatsiooniga. Vaadeldud materjalid on mittelineaarsed ja kuuluvad deformatsiooni arenemisest sõltuvate viskoelastsete materjalide klassi.

J. ENGELBRECHT

ON STEADY WAVE PROFILES IN VISCOELASTIC SOLIDS

Confining the attention to the case of one-dimensional strain, the generalized results are presented for steady deformation waves in hardening and softening materials. The material is assumed to be nonlinear with long-range viscoelastic memory.