EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.4.03

УДК 518 : 517.392

В. АРРО

НАИЛУЧШАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ x^α

Пусть n, r, M, $\alpha>-1$ заданные числа. На множестве функций $W^{(2r)}L_\infty=\{f(x): f^{(2r-1)}(x)$ — абсолютно непрерывна, $\underset{0\leqslant x\leqslant 1}{\mathrm{supvrai}}|f^{(2r)}(x)|\leqslant M\}$ рассмотрим задачу построения наилучшей [1] формулы вида

$$\int_0^1 x^\alpha f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{2r-2}A_{kj}f^{(j)}(x_k)+R_n(f),\tag{1}$$

где

$$0\leqslant x_1<x_2<\ldots<x_{n-1}<x_n\leqslant 1,\tag{2}$$

т. е. установим узлы x_k и веса A_{kj} ($k=1,2,\ldots,n$; $j=0,1,\ldots,2r-2$) так, чтобы величина

$$R_n=\sup_{f\in W^{(2r)}L_\infty}|R_n(f)|$$

приняла наименьшее значение. Для этого воспользуемся теоремой С. Н. Бернштейна [2] о многочленах наименьшего уклонения от заданной функции в метрике L и методом С. М. Никольского [1] для определения весов наилучших формул.

Согласно [3] наилучшая формула (1) должна быть точна для многочленов степени $2r-1$, поэтому легко видеть [1], что

$$R_n=MU_n,$$

где

$$U_n=\int_0^1|K(t)|\,dt,$$

$$K(t)=\varphi(t)-\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{2r-2}A_{kj}\frac{(x_k-t)^{2r-1-j}}{(2r-1-j)!}E(x_k-t),$$

$$\varphi(t)=\int_t^1\frac{(x-t)^{2r-1}}{(2r-1)!}x^\alpha\,dx,\qquad E(u)=\begin{cases}1, & u>0,\\ 0, & u\leqslant 0.\end{cases}$$

Введем обозначения:

$$x_0=1-x_{n+1}=0,\ a_i=0{,}5(x_{i+1}+x_i),$$
$$h_i=0{,}5(x_{i+1}-x_i)\quad(i=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$
$$u_k=\frac{k\cdot\pi}{2r+1}\quad(k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2r),$$

$$\omega_{2r}(x)=\prod_{k=1}^{2r}(x-u_k)=\frac{\sin[(2r+1)\arccos x]}{2^{2r}\sqrt{1-x^2}},$$

$Q_i(u)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа степени $2r-1$, построенный для функции $\varphi(h_i u+a_i)$ по узлам u_k $(k=1, 2, \ldots, 2r)$, $i=1, 2, \ldots, n-1$,

$$Q_0(t)=\int_0^1\frac{(x-t)^{2r-1}}{(2r-1)!}x^\alpha\,dx, \quad Q_n(t)\equiv 0.$$

Использовав условия точности формулы (1), функцию $K(t)$ перепишем в виде

$$K(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t\frac{(t-x)^{2r-1}}{(2r-1)!}x^\alpha\,dx, & t\in[0,x_1),\\ \displaystyle\varphi(t)-\sum_{k=i+1}^{n}\sum_{j=0}^{2r-2}A_{kj}\frac{(x_k-t)^{2r-1-j}}{(2r-1-j)!}, & t\in[x_i,x_{i+1})\\ & (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),\\ \varphi(t), & t\in[x_n,1].\end{cases}$$

Рассмотрим функцию

$$L(t)=\begin{cases}\displaystyle\int_0^t\frac{(t-x)^{2r-1}}{(2r-1)!}x^\alpha\,dx, & t\in[0,x_1),\\ \displaystyle\varphi(t)-Q_i\left(\frac{t-a_i}{h_i}\right), & t\in[x_i,\ x_{i+1}) \quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1),\\ \varphi(t), & t\in[x_n,1].\end{cases}$$

Согласно [2], по аналогии с [4, 5] имеем неравенство

$$\int_0^1|K(t)|\,dt\geqslant\int_0^1|L(t)|\,dt. \tag{3}$$

Упростим правую часть этого неравенства, использовав известную формулу из [6] и то, что $\varphi(t)\geqslant 0$ для всех $t\in[0,1]$. В итоге получим

$$V_n=\int_0^1|L(t)|\,dt=\int_0^{x_1}\left(\int_0^t\frac{(t-x)^{2r-1}}{(2r-1)!}x^\alpha\,dx\right)dt+$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}h_i\int_{-1}^{1}\varphi(h_iu+a_i)\operatorname{sign}\omega_{2r}(u)\,du+\int_{x_n}^{1}\varphi(t)\,dt=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2r+2)}[x_n^{2r+\alpha+1}- \tag{4}$$

$$-2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{2r}(-1)^{k-1}(h_iu_k+a_i)^{2r+\alpha+1}]+\int_{x_n}^{1}\varphi(t)\,dt.$$

Установим, при каких значениях x_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, удовлетворяющих (2), величина V_n принимает наименьшее значение. Для этого используем следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если* $\psi^{(2r)}(x)$ *непрерывна на* $[-1, 1]$, *то справедливы формулы:*

$$\sum_{k=1}^{2r} (-1)^{k-1}(1+u_k)\psi(u_k)=\psi(1)-\frac{2r+1}{2^{2r}(2r)!}\psi^{(2r)}(\xi_1), \tag{5}$$

$$\sum_{k=1}^{2r} (-1)^{k}(1-u_k)\psi(u_k)=\psi(-1)-\frac{2r+1}{2^{2r}(2r)!}\psi^{(2r)}(\xi_2), \tag{6}$$

где $\xi_1, \xi_2 \in (-1, 1)$.

Доказательство получается сразу, если в интерполяционной формуле

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{2r}\frac{\omega_{2r}(x)}{(x-u_k)\,\omega'_{2r}(u_k)}\psi(u_k)+\frac{\psi^{(2r)}(\xi)}{(2r)!}\omega_{2r}(x)$$

взять $x=1$ (при выводе формулы (5)) и $x=-1$ (при выводе формулы (6)) и учесть, что

$$\omega_{2r}(1)=\omega_{2r}(-1)=\frac{2r+1}{2^{2r}},\qquad \omega'_{2r}(u_k)=(-1)^{k-1}\frac{\omega_{2r}(1)}{1-u_k^2}.$$

Лемма 2. *Функция*

$$F(x)=\sum_{k=1}^{2r}(-1)^{k-1}(1+u_k)\,[1+u_k+x(1-u_k)]^{2r+\alpha}$$

монотонно возрастает на $(0, 1)$ *и монотонно убывает при* $x>1$.

Доказательство. Рассмотрим при фиксированном x величину

$$F'(x)=(2r+\alpha)\sum_{k=1}^{2r}(-1)^{k-1}(1+u_k)\,(1-u_k)\,[1+u_k+x(1-u_k)]^{2r+\alpha-1}.$$

Взяв в (5) $\psi(u)=(1-u)\,[1+u+x(1-u)]^{2r+\alpha-1}$, получим, что $F'(x)<0$ для $x>1$ $(\alpha>-1)$ и $F'(x)>0$ для $0<x<1$ $(-1<\alpha\leqslant 0)$.

Далее, приняв в (6) $\psi(u)=(1+u)\,[1+u+x(1-u)]^{2r+\alpha-1}$, получим, что $F'(x)>0$ для $0<x<1$ и $\alpha>0$. Это и доказывает лемму.

Исходя из свойств функции $F(x)$, легко доказывается

Лемма 3. *Система*

$$\begin{gathered}
F(\gamma_1)=0,\\
F(\gamma_2)-F\left(\frac{1}{\gamma_1}\right)=0,\\
F(\gamma_3)-F\left(\frac{1}{\gamma_2}\right)=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\\
F(\gamma_{n-1})-F\left(\frac{1}{\gamma_{n-2}}\right)=0,\\
\gamma_i>1\quad (i=1,2,\ldots,n-1)
\end{gathered} \tag{7}$$

имеет единственное решение, и это решение удовлетворяет соотношению

$$\gamma_1>\gamma_2>\ldots>\gamma_{n-1}.$$

Фиксируем временно $x_n \in (0,1]$. При этом условии справедлива

Лемма 4. 1) *Система уравнений*

$$\frac{\partial V_n}{\partial x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{8}$$

где x_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ *удовлетворяют* (2), *имеет единственное решение*

$$x_k^* = x_n \prod_{i=k}^{n-1} \frac{1}{\gamma_i} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{9}$$

где γ_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — *решение системы* (7).

2) *Числа* $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, *удовлетворяющие условию* (2) *и доставляющие величине* V_n *наименьшее значение* V_n^*, *совпадают с* (9) *и*

$$V_n^* = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2r+2)} x_n^{2r+\alpha+1} \left[1 - F\left(\frac{1}{\gamma_{n-1}}\right) \Big/ F(1)\right] + \int_{x_n}^{1} \varphi(t)\, dt.$$

Доказательство. Выписав подробно уравнения (8), получим систему

$$\begin{gathered}
\sum_{k=1}^{2r} (-1)^{k-1} (1 - u_k)(h_1 u_k + a_1)^{2r+\alpha} = 0, \\
\sum_{k=1}^{2r} (-1)^{k-1} [(1 + u_k)(h_{i-1} u_k + a_{i-1})^{2r+\alpha} + (1 - u_k)(h_i u_k + a_i)^{2r+\alpha}] = 0. \\
(i = 2, 3, \ldots, n-1).
\end{gathered} \tag{10}$$

Разделив i-е уравнение системы (10) на $x_i^{2r+\alpha}$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ и обозначив $\gamma_i = \frac{x_{i+1}}{x_i}$ (в силу (2) $\gamma_i > 1$) $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, придем к системе (7). При найденных γ_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ имеем $x_1^* = \frac{x_2^*}{\gamma_1}$, $x_2^* = \frac{x_3^*}{\gamma_2}$, $\ldots$, $x_{n-1}^* = \frac{x_n}{\gamma_{n-1}}$, откуда и следует (9).

При доказательстве второй части леммы используются свойства функции $F(x)$, и оно проводится индукцией (по аналогии с доказательством леммы 4 в [5]).

Из (4) согласно лемме 4 имеем

$$V_n \geqslant \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2r+2)} x_n^{2r+\alpha+1} \left[1 - F\left(\frac{1}{\gamma_{n-1}}\right) \Big/ F(1)\right] + \int_{x_n}^{1} \varphi(t)\, dt. \tag{11}$$

Итак, осталось установить $x_n \in (0,1]$ так, чтобы правая часть в (11) приняла наименьшее значение. Условие экстремума дает уравнение

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+2r+1)} x_n^{2r+\alpha} \left[1 - F\left(\frac{1}{\gamma_{n-1}}\right) \Big/ F(1)\right] - \varphi(x_n) = 0. \tag{12}$$

Легко убедиться, что при $x_n \in (0,1)$ левая часть уравнения (12) как функция от x_n монотонно возрастает, откуда следует существование и единственность решения уравнения (12)

$$x_n = x_n^*. \tag{13}$$

Учитывая единственность экстремальной точки из $(0,1)$ для правой части (11), которую обозначим через $v=v(x_n)$, и сравнивая величины $v(0)$, $v(1)$ и $v(x_n^*)$, убеждаемся, что

$$\inf_{x_n} v=v(x_n^*)=\frac{(1-x_n^*)^{2r}}{(2r)!(2r+\alpha+1)}.$$

В итоге имеем

$$\inf_{\{x_i\}} V_n=\frac{(1-x_n^*)^{2r}}{(2r)!(2r+\alpha+1)}.$$

Обозначаем через $L^*(t)$ функцию $L(t)$, у которой $x_i=x_i^*$ $(i=1,2,\ldots,n)$. Непосредственной проверкой устанавливаем, что система (10), взятая совместно с уравнением (12), совпадает с системой уравнений

$$Q_0(x_1)=Q_1(-1)$$
$$Q_{i-1}(1)=Q_i(-1)\qquad (i=2,\ 3,\ \ldots,\ n).$$

Отсюда следует, что функция $L^*(t)$ непрерывна и, следовательно, принадлежит множеству функций $K(t)$, т. е. в (3) достигается знак равенства тогда и только тогда, когда $x_i=x_i^*$ $(i=1,2,\ldots,n)$.

Методом С. М. Никольского [1] устанавливаем, что $K(t)\equiv L^*(t)$ тогда и только тогда, когда веса A_{kj} $(k=1,2,\ldots,n;\ j=0,1,\ldots,2r-2)$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
&A_{1j}=(-1)^{1+j}\left[Q_0^{(2r-1-j)}(x_1^*)-h_1^{*\,j-2r+1}\,Q_1^{(2r-1-j)}(-1)\right]\\
&\qquad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ 2r-2),\\
&A_{kj}=(-1)^{1+j}\left[h_{k-1}^{*\,j-2r+1}Q_{k-1}^{(2r-1-j)}(1)-h_k^{*\,j-2r+1}\,Q_k^{(2r-1-j)}(-1)\right]\\
&\qquad (k=2,\ 3,\ \ldots,\ n;\quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ 2r-2),
\end{aligned}\tag{14}$$

где $x_0^*=1-x_{n+1}^*=0$, $h_k^*=0{,}5(x_{k+1}^*-x_k^*)$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$.

Итак, доказана

Теорема. *Единственная наилучшая на множестве* $W^{(2r)}L_\infty$ *формула* (1) *имеет узлы* (9), (13), *веса* (14) *и оценку остатка*

$$R_n=\frac{M}{(2r)!(2r+\alpha+1)}(1-x_n^*)^{2r}.$$

Отметим, что при $\alpha=0$ из полученной теоремы следует одна из формул, построенных в [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Бернштейн С. Н., Собрание сочинений, т. I, 1952, с. 330—332.
3. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, 90—91 (1971).
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 362 (1974).
5. Левин М., Арро В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 362 (1974).
6. Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М., 1965, с. 99.
7. Ибрагимов И., Алиев Р., Докл. АН СССР, 162, № 1 (1965).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 4/VII 1975

V. ARRO

PARIM KVADRATUURVALEM KAALUFUNKTSIOONIGA x^{α}

On leitud parim kvadratuurvalem (1) funktsioonihulgale $W^{(2r)}L_{\infty}=\{f(x): f^{(2r-1)}$ absoluutselt pidev, $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\operatorname{vrai}|f^{(2r)}|\leqslant M\}$, s. t. arvud x_k, A_{kj} $(k=1, 2, \ldots, n;\ j=0, 1, \ldots, 2r-2)$ on määratud nii, et

$$\sup_{f\in W^{(2r)}L_{\infty}} |R_n(f)|$$

oleks minimaalne.

V. ARRO

BEST QUADRATURE FORMULA WITH WEIGHT FUNCTION x^{α}

The best quadrature formula (1) for set of functions $W^{(2r)}L_{\infty}=\{f(x): f^{(2r-1)}$ abs. continuous, $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\operatorname{vrai}|f^{(2r)}|\leqslant M\}$ has been found, i. e. values x_k, A_{kj} $(k=1, 2, \ldots, n;$ $j=0, 1, \ldots, 2r-2)$ are determined to minimize

$$\sup_{f\in W^{(2r)}L_{\infty}} |R_n(f)|.$$