EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 24. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1975, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 24
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1975, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1975.4.02

УДК 577.4

Т. ЛАУСМАА

О СВОЙСТВАХ РЕАЛИЗУЕМЫХ АВТОМАТАМИ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛУГРУПП

Работа каждого автомата с выходом может быть описана через множество реализуемых данным автоматом отображений входной полугруппы в выходную полугруппу. Вся информация, содержащаяся в понятии автомата, исчерпывается знанием этого множества отображений. Во многих случаях оказывается полезным характеризовать автомат именно через эти отображения. При этом возникает необходимость выяснить основные свойства реализуемых автоматом отображений и рассмотреть их связь со структурой данного автомата.

В настоящей работе для изучения реализуемых автоматом отображений вводится понятие полуморфизма, обобщающее гомоморфизм для полугрупп. Оказывается, что все реализуемые автоматами отображения принадлежат к какому-то подклассу полуморфизмов. Приводятся некоторые свойства полуморфизма и рассматривается их реализация автоматами.

Пусть даны две полугруппы S_1 и S_2. Рассмотрим множество $\mathfrak{F}$ всех отображений полугруппы S_1 в полугруппу S_2.

Определение 1. Отображение $f: S_1 \to S_2$ будем называть a-разложимым ($a \in S_1$) тогда и только тогда, когда найдется $f_a \in \mathfrak{F}$ такое, что для каждого $b \in S_1$ имеет место $f(ab) = f(a)f_a(b)$.

Отображение $f: S_1 \to S_2$ будем называть A-разложимым ($A \subset S_1$) тогда и только тогда, когда f для любого $a \in A$ является a-разложимым.

S_1-разложимое отображение $f: S_1 \to S_2$ будем называть полуморфизмом. Если же S_1 и S_2 — моноиды, а f отображает единицу полугруппы S_1 в единицу полугруппы S_2, то f будем называть полуморфизмом моноидов.

Обозначим через $\mathfrak{F}_S$ совокупность всех полуморфизмов: $S_1 \to S_2$. Каждому $f \in \mathfrak{F}_S$ соответствует отображение $d_f: a \to F_a$ полугруппы S_1 в $2^{\mathfrak{F}}$, где F_a — множество отображений $f' \in \mathfrak{F}$, удовлетворяющее для любого $b \subset S_1$ условию $f(ab) = f(a)f'(b)$.

Для каждого $f \in \mathfrak{F}_S$ и $a \in S_1$ обозначим через $D(f, a)$ подмножество полуморфизмов, принадлежащее к $d_f(a)$. Для любого $F \in \mathfrak{F}_S$ обозначим $D(F, a) \underset{Df}{=} \bigcup_{f_i \in F} D(f_i, a)$.

Пусть S — полугруппа и $S \cup \{1\}$ — моноид, полученный из S присоединением единицы. Определим полугруппу S^1:

$$S^1 \underset{Df}{=} \begin{cases} S & \text{, если } S \text{ моноид;} \\ S \cup \{1\} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В дальнейшем будем обозначать единицу полугруппы S через 1_S.

Пусть S — полугруппа. Введем в S отношение $\leqslant_\alpha$, определенное следующим образом:

$$a \leqslant_\alpha b \underset{Df}{\Leftrightarrow} (\exists c)\,(c \in S^1 \wedge ac = b).$$

Легко проверить, что отношение $\leqslant_\alpha$ является отношением предпорядка в S. Назовем его отношением левого деления.

Нетрудно доказать справедливость следующего предложения.

Предложение 1. Для отображения f полугруппы S_1 в полугруппу S_2 эквивалентны следующие условия:

1) f — полуморфизм;

2) для любых $a, b \in S_1$ найдется $x \in S_2$ такой, что $f(ab) = f(a)x$ ([1], с. 157, определение 15.1);

3) $S_2 = S_2^1$ и для любых $a, b \in S_1$ из $a \leqslant_\alpha b$ следует $f(a) \leqslant_\alpha f(b)$ ([1], с. 160, упражнение 1);

4) для любых $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S_1$ существуют $b_1, b_2, \ldots, b_n \in S_2$ такие, что $f(a_1a_2 \ldots a_n) = b_1b_2 \ldots b_n \in S_2$ и для любого $k \leqslant n$ справедливо $f(a_1a_2 \ldots a_k) = b_1b_2 \ldots b_k$.

Из условия 2 предложения 1 непосредственно вытекает, что полуморфизмами являются: а) последовательностные функции [2], б) левые сдвиги; в) любые отображения произвольной полугруппы в простую полугруппу справа.

Лемма 1. Для каждого $f \in \mathfrak{F}_S$ и $a \in S_1$ из $D(f, a) \neq \varnothing$ следует, что любой $b \in S_1$ удовлетворяет условию $D(D(f, a)b) \subset D(f, ab)$.

Доказательство. Пусть $f' \in D(f, a)$ и $f'' \in D(f', b)$ (в случае $D(f', b) = \varnothing$ справедливость леммы очевидна). Тогда для любого $c \in S_1$ имеем $f(abc) = f(a)f'(bc) = f(a)f'(b)f''(c) = f(ab)f''(c)$, откуда непосредственно следует $f'' \in D(f, ab)$ и поэтому $D(D(f, a), b) \subset \subset D(f, ab)$.

Лемма 2. Пусть S_1, S_2 — моноиды и $f: S_1 \to S_2$ — моноидный полуморфизм. Тогда $d_f(1_{S_1}) = \{f\}$.

Доказательство. Действительно, пусть $f' \in d_f(1_{S_1})$. Тогда для любого $a \in S_1$ получаем $f(a) = f(1_{S_1}a) = f(1_{S_1})f'(a) = 1_{S_2}f'(a) = f'(a)$ и поэтому $d_f(1_{S_1}) = \{f\}$.

Из леммы 2 вытекает

Следствие 1. Для того чтобы моноидный полуморфизм $f: S_1 \to S_2$ был гомоморфизмом, необходимо и достаточно выполнимости для любых $a, b \in S_1$ условия $d_f(a) \cap d_f(b) \neq \varnothing$.

Из определения полуморфизма непосредственно следует справедливость следующей леммы.

Лемма 3. Пусть $f: S_1 \to S_2$ — полуморфизм, $a \in S_1$ и $f' \in d_f(a)$. Пусть $b_1 \in S_1$ и $b_2 \in S_2$ такие, что $f(ab_1) = f(a)b_2$. Тогда найдется отображение $f'' \in d_f(a)$ такое, что $f'' = f'$ на $S_1 \setminus b_1$ и $f''(b_1) = b_2$.

Предложение 2. Пусть даны полуморфизмы $f: A \to B$ и $g: B \to C$. Тогда произведение отображения $g \circ f: A \to C$ тоже является полуморфизмом.

Доказательство. Пусть $a, b \in A$. Тогда найдутся $f' \in d_f(a)$ и $g' \in d_g(f(a))$ такие, что $g \circ f(ab) = g(f(a)f'(b)) = g \circ f(a)\; g' \circ f'(b)$. Из этого непосредственно следует, что $g \circ f$ — полуморфизм.

Элемент $a \in S_1$ будем называть идемпотентом относительно полуморфизма $f: S_1 \to S_2$ тогда и только тогда, когда $f \in d_f(a)$.

Предложение 3. Для любого моноидного полуморфизма $f: S_1 \to S_2$ подмножество идемпотентов $I_f \subset S_1$ относительно f является подмоноидом и сужение f на I_f является гомоморфизмом $f': I_f \to S_2$.

Доказательство. Из леммы 2 вытекает $1_{S_1} \in I_f$. Пусть $a, b \in I_f$. Тогда $f \in d_f(a)$, $d_f(b)$. Но тогда и $f \in d_f(ab)$, ибо $D(D(f, a), b) \subset \subset D(f, ab)$. Значит, $ab \in I_f$ и поэтому I_f — подмоноид моноида S_1. Из определения I_f непосредственно следует, что для каждых $a, b \in I_f$ верно $f(ab) = f(a)f(b)$.

Пусть $f: S_1 \to S_2$ — полуморфизм. В общем $f(S_1)$ не является подполугруппой полугруппы S_2. Однако можно доказать следующее

Предложение 4. Пусть $f: S_1 \to S_2$ — моноидный полуморфизм. Тогда $S'_2 \underset{Df}{=} \bigcap\limits_{a \in S_1} \left(\bigcup\limits_{f_i \in d_f(a)} f_i(S_1) \right) \subset f(S_1)$ — подполугруппа полугруппы S_2.

Доказательство. Так как для любого $a \in S_1$ справедливо $f(a) = f(a 1_{S_1}) = f(a) f'(1_{S_1}) = f(a) 1_{S_2}$, где $f' \in d_f(a)$, то из леммы 3 вытекает $1_{S_2} \in \bigcup\limits_{f_i \in d_f(a)} f_i(S_1)$ и поэтому $S'_2 \neq \varnothing$. Пусть теперь $a_2, b_2 \in S'_2$. Тогда для любого $c \in S_1$ найдется $f \in d_f(c)$ такое, что $a_2 \in f_c(S_1)$. Пусть $a_1 \in S_1$ такой, что $f_c(a_1) = a_2$. Тогда найдется $f' \in d_f(ca_1)$ такое, что $b_2 \in f'(S_1)$. Выберем $b_1 \in S_1$ такой, что $f'(b_1) = b_2$. Тогда $f(ca_1b_1) = f(c) f_c(a_1b_1) = f(c) f_c(a_1) f'(b_1) = f(c) a_2 b_2$, откуда и из леммы 3 вытекает $a_2 b_2 \in \bigcup\limits_{f_k \in d_f(c)} f_k(S_1)$ и поэтому $a_2 b_2 \in S'_2$.

Следствие 2. Пусть $f: S_1 \to S_2$ — полуморфизм. Если для любого $a \in S_1$ верно $f(S_1) \subset \bigcup\limits_{f_k \in d_f(a)} f_k(S_1)$, то $f(S_1)$ — подполугруппа полугруппы S_2.

Определим на полугруппе S отношение эквивалентности $\equiv_c$, где $c \in S$, полагая: $x \equiv_c y \underset{Df}{\Longleftrightarrow} cx = cy$.

Элементы a и b полугруппы S будем называть независимыми справа тогда и только тогда, когда $aS^1 \cap bS^1 = \varnothing$.

Предложение 5. Пусть $f: S_1 \to S_2$ полуморфизм и A — подмножество полугруппы S_1. Если любые различные $b, c \in A$ справа независимы, то для каждого $a \in S_1$ найдется A-разложимое $f_A \in d_f(a)$.

Доказательство. Покажем сначала, что для любого $c \in S_1$ найдется c-разложимое $f' \in d_f(a)$.

Пусть $f_a \in d_f(a)$ и $f_{ac} \in d_f(ac)$. Обозначим через $[x]_c$ класс эквивалентности на $S_1/\equiv_c$, содержащий x. Выберем из каждого класса $[x]_c$ одного представителя x_c. Определим на S_1 отображение f':

а) $f' \underset{Df}{=} f_a$ на $S_1 \setminus cS_1$;

б) $f'(cx) \underset{Df}{=} f_a(c) f_{ac}(x_c)$.

Покажем, что $f' \in d_f(a)$. Действительно, пусть $b \in S_1$. Тогда, если $b \in S_1 \setminus cS_1$, то $f(a) f'(b) = f(a) f_a(b) = f(ab)$, ибо $f_a \in d_f(a)$. Если $b \in cS_1$, то найдется $d \in S_1$ такой, что $b = cd$ и поэтому $f(a) f'(cd) = = f(a) f_a(c) f_{ac}(d_c) = f(ac) f_{ac}(d_c) = f(acd_c) = f(acd)$.

Обозначая $f''(x) \underset{Df}{=} f_{ac}(x_c)$ для любого $x \in S_1$, для каждого $y \in S_1$ получим $f'(cy) = f'(c) f''(y)$, откуда и следует c-разложимость f'.

Определим теперь f_A на S_1:

а) $f_A \underset{Df}{=} f_a$ на $S_1 \setminus \bigcup_{b\in A} bS_1$;

б) для любого $b\in A$ верно $f_A(bx) \underset{Df}{=} f_a(b) f_{ab}(x_b)$ на bS_1, где $f_{ab}\in \in d_f(ab)$ и $x_b \in [x]_b$.

Легко проверить, что определение отображения f_A корректно, $f_A \in \in d_f(a)$ и f_A является A-разложимым.

Следствие 3. Пусть $f: S_1 \to S_2$ полуморфизм и $a\in S_1$. Если множество $d_f(a)$ состоит из одного отображения, то это отображение — полуморфизм.

Определение 2. Полуморфизм $f: S_1\to S_2$ будем называть стабильным тогда и только тогда, когда для каждого $a\in S_1$ верно $D(f,a)\neq\varnothing$.

Ясно, что любое отображение f произвольной полугруппы S_1 в простую полугруппу справа S_2 является стабильным полуморфизмом.

Из предложения 2 вытекает, что композиция стабильных полуморфизмов тоже является стабильным полуморфизмом.

Пусть $f: S_1\to S_2$ — полуморфизм и S_2 — полугруппа с левым сокращением (т. е. $xa = xb \Rightarrow a = b$ для любых $a, b, x\in S_2$). Если теперь $a\in S_1$ и $f', f''\in d_f(a)$, то для любого $b\in S_1$ справедливо $f(ab) = = f(a)f'(b) = f(a)f''(b)$, откуда непосредственно следует $f' = f''$. Поэтому из следствия 3 вытекает

Предложение 6. Если S_2 — полугруппа с левым сокращением, то любой полуморфизм $f: S_1\to S_2$ стабилен и для каждого $a\in S_1$ множество $d_f(a)$ состоит из единственного элемента, который является полуморфизмом.

Пусть X — множество. Обозначим через $W(X)$ свободную полугруппу над X.

Предложение 7. Пусть $S_1 = W(X)$. Тогда любой полуморфизм $f: S_1\to S_2$ стабилен.

Доказательство. Поставим в соответствие всякому $c\in S_1$ некоторый $f_c\in d_f(c)$. Пусть $b\in S_1$, $b = x_1x_2\ldots x_n$ и $x_1, x_2, \ldots, x_n\in X$. Определим f' для любого $b\in S_1$, полагая $f'(b) \underset{Df}{=} f_c(x_1) f_{cx_1}(x_2)\ldots \ldots f_{cx_1x_2\ldots x_{n-1}}(x_n)$. Так как разложение $b = x_1x_2\ldots x_n$ однозначно, то такое определение отображения f' корректно. Нетрудно установить $f'\in d_f(c)$. Из ассоциативности полугрупповой операции на S_1 выводится также $f'\in\mathfrak{F}_S$.

Следствие 4. Пусть $f: S_1\to S_2$ — полуморфизм. Тогда существует подполугруппа $S_1'\subset S_1$ такая, что сужение f на S_1' является стабильным полуморфизмом.

(Если S_1 — непериодическая полугруппа, то в качестве S_1' достаточно взять циклическую полугруппу $\langle a\rangle$, порожденную элементом $a\in S_1$ бесконечного порядка. Если S_1 — периодическая полугруппа, то в качестве S_1' можно принять подполугруппу $\{e\}$, где e — идемпотент полугруппы S_1).

Пусть $A\subset S$ — порождающее множество полугруппы S. Тогда существует эпиморфизм φ: $W(A)\to S$. Поэтому из предложений 2 и 7 вытекает

Следствие 5. Для любого полуморфизма $f: S_1\to S_2$ найдутся полугруппа S_1' и эпиморфизм $h: S_1'\to S_1$ такие, что $f\circ h$ — стабильный полуморфизм.

Определение 3. Подмножество полуморфизмов $F\subset\mathfrak{F}_S$ будем называть инвариантным тогда и только тогда, когда для любых $a\in S_1$ и $f\in F$ верно $d_f(a)\cap F\neq\varnothing$.

Легко проверить справедливость следующего предложения.

Предложение 8. Пусть F' и F'' инвариантные подмножества полуморфизмов $f: S_1 \to S_2$. Тогда $F' \cup F''$ тоже инвариантное подмножество полуморфизмов.

Если S_2 — полугруппа с левым сокращением, то и $F' \cap F''$ — инвариантное подмножество полуморфизмов.

Определение 4. Пусть даны полуморфизмы $f_1: A_1 \to B_1$ и $f_2: A_2 \to B_2$ между полугруппами A_1, B_1 и A_2, B_2. Определим полупрямое произведение полуморфизмов f_1 и f_2 с гомоморфизмом связи $h: B_1 \times A_2 \to A_2$ как отображение

$$f_1 \times_h f_2 : (a_1, a_2) \mapsto (f_1(a_1), f_2 \circ h(f_1(a_1), a_2))$$

произведения $A_1 \times A_2$ в $B_1 \times B_2$.

Нетрудно доказать, что полупрямое произведение тоже является полуморфизмом.

Предложение 9. Пусть A_1, A_2, B_1, B_2 — полугруппы. Если F_1 и F_2 инвариантные подклассы полуморфизмов $f_1: A_1 \to B_1$ и $f_2: A_2 \to B_2$ соответственно, то для любого гомоморфизма связи h подкласс $F_1 \times_h F_2$ тоже инвариантен.

Доказательство. Пусть $a_1, b_1 \in A_1$; $a_2, b_2 \in A_2$; $f_1' \in d_{f_1}(a_1) \cap F_1$ и $f_2' \in d_{f_2}(h(f_1(a_1), a_2)) \cap F_2$. Обозначив $f \underset{Df}{=} f_1 \times_h f_2$, получаем

$$\begin{aligned} f((a_1, a_2)(b_1, b_2)) &= f(a_1 b_1, a_2 b_2) = \\ &= (f_1(a_1 b_1), f_2 \circ h(f_1(a_1 b_1), a_2 b_2)) = \\ &= (f_1(a_1) f'_1(b_1), f_2 \circ h(f_1(a_1), a_2) f'_2 \circ h(f'_1(b_1), b_2)) = \\ &= (f_1(a_1), f_2 \circ h(f_1(a_1), a_2))(f'_1(b_1), f'_2 \circ h(f'_1(b_1), b_2)) = \\ &= f(a_1, a_2) f'(b_1, b_2), \end{aligned}$$

где $f' \underset{Df}{=} f_1' \times_h f_2'$. Но так как по предположению $f_1' \in F_1$ и $f_2' \in F_2$, то $f' \in F_1 \times_h F_2$.

Правым операндом M_S над полугруппой S назовем множество M вместе с отображением $(x, a) \mapsto xa$ множества $M \times S$ в M, удовлетворяющим для всех $x \in M$ и $a, b \in S$ условию $x(ab) = (xa)b$ [3].

Определение 5. Правый операнд F_{S_1} над полугруппой S_1 будем называть преобразователем и обозначать через (S_1, S_2, F) тогда и только тогда, когда F подкласс полуморфизмов $f: S_1 \to S_2$ такой, что для любых $f \in F$ и $a \in S_1$ справедливо $fa \in d_f(a)$.

Из определения преобразователя (S_1, S_2, F) непосредственно вытекает, что F — инвариантный подкласс полуморфизмов. Если S_2 — полугруппа с левым сокращением, то из определения $fa \underset{Df}{=} d_f(a)$ для любых $f \in F$ и $a \in S_1$ легко видно также, что любое инвариантное подмножество $F \subset \mathfrak{F}_S$ является преобразователем (S_1, S_2, F).

Предложение 10. Пусть $S_1 = W(X)$. Тогда для любого полуморфизма $f: S_1 \to S_2$ найдется инвариантное подмножество $F \subset \mathfrak{F}_S$, содержащее f, такое, что (S_1, S_2, F) — преобразователь.

Доказательство. В силу предложения 7 любой $f \in \mathfrak{F}_S$ — стабильный полуморфизм. Выбираем из каждого $d_f(x)$, где $x \in X$, одного представителя $f_x \in D(f, x)$. Затем, полагая $b = x_1 x_2 \dots x_n \in S_1$, где $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$, выбираем из $d_f(b)$ одного представителя $f_b \in D(f, b)$ в следующей последовательности: сначала $f_{x_1 x_2} \in D(f_{x_1}, x_2)$, потом $f_{x_1 x_2 x_3} \in D(f_{x_1 x_2}, x_3)$ и т. д. до $f_b \in D(f_{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}, x_n)$. Легко видеть, что подмножество полуморфизмов $F \underset{Df}{=} \{f_b \mid b \in S_1\} \cup \{f\}$ инвариантно и содержит f. Из конструирования множества F непосредственно вытекает, что относительно отображения $\varphi: (f, b) \to f_b \in D(f, b)$ произведение $F \times S_1$ в F (S_1, S_2, F) является преобразователем.

Следствие 6. Для любого полуморфизма $f: S_1 \to S_2$ найдутся полугруппа S_1', эпиморфизм $h: S_1' \to S_1$ и преобразователь (S_1', S_2, F') такие, что $f \circ h \in F'$.
(Для доказательства достаточно взять $S_1' = W(A)$, где A — порождающее множество полугруппы S_1).

Следствие 7. Пусть $f: S_1 \to S_2$ — полуморфизм. Тогда найдутся подполугруппа $S_1' \subset S_1$ и преобразователь (S_1', S_2, F) такие, что сужение f на S_1' принадлежит к F.

Заимствуем теперь из работы [1] следующее

Определение 6. Четверка $(S_1, X_{S_1}, \lambda, S_2)$, где S_1, S_2 — полугруппы, X_{S_1} — правый операнд над S_1, λ — отображение $X \times S_1 \to S_2$, удовлетворяющее для любых $x \in X$ и $a, b \in S_1$ условию $\lambda(x, ab) = \lambda(x, a)\lambda(xa, b)$, называется автоматом (см. также [4], с. 402).

Назовем автомат $(S_1, X_{S_1}, \lambda, S_2)$ приведенным, если выполнимость $\lambda(x_1, a) = \lambda(x_2, a)$ для всех $a \in S_1$ дает $x_1 = x_2$.

Определим для любого $z \in X$ автомата $(S_1, X_{S_1}, \lambda, S_2)$ отображение $\lambda_z: S_1 \to S_2$, где для каждого $a \in S_1$ имеет место $\lambda_z(a) \underset{Df}{=} \lambda(z, a)$.

Предложение 11. 1) Пусть (S_1, S_2, F) — преобразователь. Тогда четверка $(S_1 (S_1, S_2, F), \lambda, S_2)$, где отображение $\lambda(f, a) \underset{Df}{=} f(a)$ для любых $f \in F$ и $a \in S_1$, является приведенным автоматом.

2) Пусть $(S_1, X_{S_1}, \lambda, S_2)$ — автомат. Тогда: а) для любого $x \in X$ отображение $\lambda_x: S_1 \to S_2$ является полуморфизмом; б) множество $F \underset{Df}{=} \{\lambda_x \mid x \in X\}$ — инвариантно и относительно отображения $\varphi: (\lambda_x, a) \mapsto \lambda_{xa}$ является преобразователем.

Доказательство. 1. Покажем сначала, что отображение λ удовлетворяет для любых $f \in F$ и $a, b \in S_1$ условию $\lambda(f, ab) = \lambda(f, a)\lambda(fa, b)$. Но это действительно так, ибо $\lambda(f, ab) = f(ab) = f(a) fa(b) = \lambda(f, a)\lambda(fa, b)$.

Если для всех $a \in S_1$ $\lambda(f_1, a) = \lambda(f_2, a)$, то $f_1(a) = f_2(a)$ для всех $a \in S_1$ и поэтому $f_1 = f_2$. Итак, $(S_1, (S_1, S_2, F), \lambda, S_2)$ — приведенный автомат.

2. а) В самом деле, для любых $a, b \in S_1$ получаем

$$\lambda_x(ab) = \lambda(x, ab) = \lambda(x, a)\lambda(xa, b) = \lambda_x(a)\lambda_{xa}(b).$$

б) Подмножество F инвариантно, ибо для любых $\lambda_x \in F$ и $a \in S_1$ верно $\lambda_{xa} \in F$. (S_1, S_2, F) — преобразователь, так как для любых $x \in X$ и $a, b \in S_1$

$$\varphi(\lambda_x, ab) = \lambda_{x(ab)} = \lambda_{(xa)b} = \varphi(\lambda_{xa}, b) = \varphi(\varphi(\lambda_x, a), b).$$

Определение 7. Отображение f полугруппы S_1 в полугруппу S_2 будем называть реализуемым тогда и только тогда, когда найдется автомат $(S_1, X_{S_1}, \lambda, S_2)$ такой, что $f = \lambda_z$, где $z \in X$.

Из предложения 11 вытекает

Следствие 8. Для реализуемости отображения $f: S_1 \to S_2$ необходимо и достаточно, чтобы нашелся такой преобразователь (S_1, S_2, F), что $f \in F$.

Из предложения 10, леммы 1 и следствия 3 вытекает непосредственно

Предложение 12. 1. Если отображение f полугруппы S_1 в полугруппу S_2 реализуемо, то f — полуморфизм. 2. Любой полуморфизм $f: S_1 \to S_2$ реализуем, если а) S_1 — свободная полугруппа; б) для любого $a \in S_1$ множество $d_f(a)$ состоит из одного отображения.

Из последнего предложения вытекает ряд следствий. Следствие 11 и есть основной результат о реализации отображений автоматами в работе [1].

Следствие 9. Для любого полуморфизма $f:S_1 \to S_2$ найдутся полугруппа S_1' и эпиморфизм $h:S_1' \to S_1$ такие, что $f \circ h$ — реализуемый полуморфизм.

Следствие 10. Для любого полуморфизма $f:S_1 \to S_2$ найдется подполугруппа $S_1' \subset S_1$ такая, что сужение f на S_1' — реализуемое отображение.

Следствие 11. Если S_2 — полугруппа с левым сокращением, то для реализуемости отображения f полугруппы S_1 в полугруппу S_2 необходимо и достаточно, чтобы f было полуморфизмом.

Так как любая группа сократима слева и простая справа, то получаем

Следствие 12. Любое отображение f произвольной полугруппы S_1 в группу S_2 реализуемо.

ЛИТЕРАТУРА

1. Deussen P., Halbgruppen und Automaten, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1971.
2. Рэни Дж., Кибернетич. сб., вып. 3, 142—146 (1961).
3. Клиффорд А., Престон Г., Алгебраическая теория полугрупп, М., 1972.
4. Ginsburg S., Trans. Amer. Math. Soc., **96**, 400—444 (1960).

Институт термофизики и электрофизики Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию 26/VI 1974

T. LAUSMAA

AUTOMAATIDEGA REALISEERITAVATE POOLRÜHMAFUNKTSIOONIDE OMADUSTEST

Iga väljundiga automaat on kirjeldatav tema abil realiseeritavate poolrühmafunktsioonide kaudu. Selline iseloomustus on paljudel juhtudel automaatide sünteesil otstarbekas, kuid ühtlasi tingib vajaduse uurida nimetatud funktsioonide omadusi. Käesolevas töös on automaadiga realiseeritavaid funktsioone iseloomustatud semiformismi mõiste kaudu, mis üldistab homomorfismi poolrühmadele. Käsitletakse semimorfismi omadusi ning näidatakse, et funktsiooni vabast poolrühmast suvalisse poolrühma on automaadiga siis ja ainult siis võimalik realiseerida, kui see osutub semimorfismiks.

T. LAUSMAA

ON SEMIGROUP MAPPINGS COMPUTED BY AUTOMATA

Every automaton with output is characterized by semigroup mappings computed by this automaton. Such a characterization of automata is useful for solving several synthesis problems of automata. In this paper, for study of semigroup mappings computed by automata the notion of semimorphism is introduced as follows: A mapping f of a semigroup S_1 into a semigroup S_2 is said to be a semimorphism if and only if for every $a \in S_1$ there exists a mapping $f_a: S_1 \to S_2$ so that $f(ab) = f(a) f_a(b)$ for each $b \in S_1$. Semimorphism generalizes the notion of homomorphism for semigroups. Several characterizations of semimorphism are given, and the computability of semimorphism by automata is studied. It is proved that a mapping of free semigroup to an arbitrary semigroup is computable by automata if and only if it is a semimorphism.