EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.4.16

УДК 517.948

*В. ПОЛЛЬ*

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

*V. POLL.* ITERATIIVSETE MEETODITE ÜHEST KLASSIST MITTELINEAARSETE OPERAATORVORRANDITE LAHENDAMISEKS

*V. POLL.* ON A CLASS OF ITERATIVE METHODS FOR SOLVING NON-LINEAR OPERATOR EQUATIONS

Для решения уравнения

$$P(x)=0, \tag{1}$$

где $P(x)$ — оператор, действующий из банахового пространства $X$ в банаховое пространство $Y$, рассмотрим следующий класс итерационных методов:

$$x_{n+1}=x_n-\alpha\Gamma_n P(x_n)-\beta\Gamma_n P(x_n-\gamma\Gamma_n P(x_n)), \tag{2}$$

где $\Gamma_n=[P'(x_n)]^{-1}$ и $P'(x_n)$ — производная Фреше оператора $P(x)$ для элемента $x_n$. Метод (2), имеющий при $\alpha=\beta=\gamma=1$ скорость сходимости третьего порядка, рассматривался в [1–5].

В данной статье покажем, что при определенных соотношениях между $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ можно получить целый однопараметрический класс методов третьего порядка сходимости.

Предположим в дальнейшем, что (1) имеет решение $x^*$, а оператор $P(x)$ — непрерывные производные требуемых порядков.

Используя формулу Тейлора, легко получаем

$$\begin{aligned}
x_{n+1}-x^* = -\Gamma_n\Big\{ & (\alpha+\beta-\beta\gamma-1)P(x_n)+\frac{1}{2}(\beta\gamma^2-1)P''(x_n)(x^*-x_n)^2- \\
& -\frac{1}{2}\int_0^1 P'''(x_n+\tau(x^*-x_n))(1-\tau)^2\,d\tau\,(x^*-x_n)^3+ \\
& +\frac{1}{2}\beta\gamma^2 P''(x_n)\Big[\Big(\Gamma_n\int_0^1 P'(x_n+\tau(x^*-x_n))\,d\tau\,(x^*-x_n)\Big)^2- \\
& -\Big(\Gamma_n\int_0^1 P'(x_n)\,d\tau\,(x^*-x_n)\Big)^2\Big]- \\
& -\frac{\beta\gamma^3}{2}\int_0^1 P'''(x_n-\tau\gamma\Gamma_n P(x_n))(1-\tau)^2\,d\tau\,[\Gamma_n P(x_n)]^3\Big\},
\end{aligned} \tag{3}$$

откуда следует, что если параметры $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ удовлетворяют условиям

$$\alpha+\beta-\beta\gamma=1, \quad \beta\gamma^2=1, \tag{4}$$

то при определенных предположениях будем иметь

$$\|x_{n+1}-x^*\|=O(\|x_n-x^*\|^3), \tag{5}$$

т. е. класс методов (2) является классом методов третьего порядка сходимости. Окончательно, выразим $\alpha$ и $\beta$ из (4) через $\gamma$. Тогда класс итерационных методов примет вид

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\gamma^2+\gamma-1}{\gamma^2}\Gamma_n P(x_n)-\frac{1}{\gamma^2}\Gamma_n P(x_n-\gamma\Gamma_n P(x_n)) \tag{6}$$

$\gamma\neq 0$; $n=0, 1, \ldots$; $x_0$ — начальное приближение к корню уравнения (1). Если $\gamma=1$, то придем к методу, рассмотренному в [1–5].

Выпишем из класса (6) три метода наиболее интересного вида:

а) $\gamma=-1$

$$x_{n+1}=x_n+\Gamma_n P(x_n)-\Gamma_n P(x_n+\Gamma_n P(x_n)); \tag{7}$$

б) $\gamma=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}(\approx -0{,}5\pm 1{,}118)$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\Gamma_n P\left(x_n-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\Gamma_n P(x_n)\right); \tag{8}$$

$$x_{n+1}=x_n-\frac{2}{3+\sqrt{5}}\Gamma_n P\left(x_n+\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Gamma_n P(x_n)\right). \tag{9}$$

Отметим, что, используя идею нахождения класса методов (6), можно получить, например, выведенные в [6, 7] на иных принципах классы методов решения операторных уравнений.

Приведем теперь простую теорему о сходимости класса методов (6).

Теорема. *Пусть*

1° *уравнение* (1) *имеет корень* $x^*$ *в сфере* $S_1(x_0;\varrho)\subset X$;

2° *в сфере* $S_2(x^*;\varrho)\subset X$ *имеют место оценки*

$$\|\Gamma_n\|\leqslant p;\quad \|P'(x)\|\leqslant K;\quad \|P''(x)\|\leqslant L;$$

3° *в сфере* $S_3(x^*;\varrho(1+|\gamma|pK))\subset X$ *имеет место оценка*

$$\|P'''(x)\|\leqslant M;$$

4° $\left[\sqrt{p\left(\frac{1}{6}M+p^2L^2K+\frac{|\gamma|}{6}p^3K^3M\right)}\right]\varrho=F\varrho<1.$

*Тогда последовательность* (6) *сходится к корню* $x^*$, *причем*

$$\|x^*-x_{n+1}\|\leqslant F^{-1}(F\varrho)^{\mu_{n+1}}, \tag{10}$$

*где*

$$\mu_{n+1}=3\mu_n\quad (n=0,\ 1,\ \ldots);\quad \mu_0=1. \tag{11}$$

Доказательство справедливости (10)—(11) проведем по индукции. Ясно, что $x_0$ удовлетворяет (10)—(11) в силу условия 1°. Пусть (10)—(11) имеет место для $k\leqslant n$. Покажем, что оно имеет место и для $n+1$.

С учетом (4) выражение (3) принимает вид

$$\leqslant p\left\{\frac{1}{6}M\|x^*-x_n\|^3+p^2KL^2\|x^*-x_n\|^3+\frac{|\gamma|}{6}p^3MK^3\|x^*-x_n\|^3\right\}. \tag{12}$$

Далее, из (12) с учетом условия 4° и (11) получаем

$$d_{n+1}=\|x^*-x_{n+1}\|\leqslant F^2d_n^3\leqslant F^{-1}(F\varrho)^{3\mu_n}=F^{-1}(F\varrho)^{\mu_{n+1}}.$$

Легко проверить, что аргументы оцениваемых в (3) величин принадлежат при условиях теоремы указанным сферам. Теорема доказана.

Выведем разностный аналог класса (6). Исходя из

$$x_{n+1}=x_n-\alpha T_nP(x_n)-\beta T_nP(x_n-\gamma T_nP(x_n)), \tag{13}$$

где $T_n=[P(\bar{x}_n;x_n)]^{-1}$, $P(\bar{x}_n;x_n)$ — обобщенная разделенная разность первого порядка оператора $P(x)$ (см. [8]), и используя обобщенную интерполяционную формулу Ньютона из [8], легко получаем ☆

$$\begin{aligned} x_{n+1}-x^*=-T_n\{(\alpha+\beta-\beta\gamma-1)P(x_n)+\\ +(\beta\gamma^2-1)P(x^*;\bar{x}_n;x_n)(x^*-x_n)^2-\\ -(\beta\gamma-1)P(x^*;\bar{x}_n;x_n)(x^*-x_n)(x_n-\bar{x}_n)+\\ +\text{члены более высоких порядков}\}.\end{aligned} \tag{14}$$

Из (14) ясно, что класс методов (13) будет классом методов третьего порядка, если $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ удовлетворяют (4) и если, например,

$$\|x_n-\bar{x}_n\|\leqslant c\|P(x_n)\|^2, \tag{15}$$

где $c$ — некоторая константа (см. [9]). Следовательно, соответствующий классу (6) разностный аналог принимает вид

$$x_{n+1}=x_n-\frac{\gamma^2+\gamma-1}{\gamma^2}T_nP(x_n)-\frac{1}{\gamma^2}T_nP(x_n-\gamma T_nP(x_n)) \tag{16}$$

$\gamma\neq 0$; $n=0,1,\ldots$; $x_0,\bar{x}_0$ — начальные приближения к корню уравнения (1).

Формулировка теоремы сходимости для метода (16) будет аналогичной приведенной выше теореме.

Замечание 1. Методы (6) и (16) имеют перед методами типа [6, 7] явное преимущество: они хотя и требуют решения на каждом итерационном шаге двух линейных уравнений (в случае системы нелинейных уравнений — двух систем линейных уравнений), эти уравнения отличаются друг от друга лишь правыми частями, т. е. их решение можно получить путем меньшего количества вычислений, чем методов [6, 7], где соответствующие линейные уравнения содержат также разные операторы (матрицы при неизвестных).

Замечание 2. Из приведенной теоремы видно, что чем меньше $\gamma$, тем лучше выполняются условия теоремы, т. е. можно ожидать более широкой области применения метода. В силу этого из методов (8) и (9), по-видимому, предпочтительнее метод (8) ($\gamma\approx 0{,}618$).

Замечание 3. Если взять за приближение $P'(x_n)$ $P(2x_n-x_{n-1};x_{n-1})$ — обобщенную разделенную разность первого порядка оператора $P(x)$ на элементах $2x_n-x_{n-1}$ и $x_{n-1}$ (здесь выбор элементов свободен от ограничения (15), обычно трудно реализуемого при

---

☆ $P(x';x'')(x'-x'')=P(x')-P(x'')$;
$P(x';x'';x''')(x'-x'')=P(x';x''')-P(x'';x''')$.

практическом применении метода), то получим метод без параметра ($\alpha=\beta=\gamma=1$)

$$x_{n+1}=x_n-T'_nP(x_n)-T'_nP(x_n-T'_nP(x_n)), \tag{17}$$

где $T'_n=[P(2x_n-x_{n-1};\ x_{n-1})]^{-1}$, $n=1, 2, \ldots$, который представляет собой разностный аналог метода, приведенного в [1-5], и имеет порядок сходимости $k=\frac{1+\sqrt{17}}{2}\cong 2{,}56$ ($k$ — решение уравнения $k^2-k-4=0$).

Чтобы получить метод с $k=3$, требуется аппроксимировать $P'(x_n)$ уже выражением $A_1(x_n):\|A_1(x_n)-P'(x_n)\|=O(\|x_{n-1}-x_n\|^3)$.

За такое выражение можно принять

$$A_1(x_n)=\frac{1}{6}[4P(2x_n-x_{n-1};\ x_{n-1})+3P(x_n;\ x_{n-1})-P(x_{n-1};\ 2x_{n-1}-x_n)]$$

(см. [10]).

## ЛИТЕРАТУРА


1. Schmidt J. W., Math. Nachr., 37, H. 1/2, 67 (1968).
2. Bosarge W. E. Jr., Falb P. L., J. Optimiz. Theory and Appl., 4, No. 3, 156 (1969).
3. Коган Т. И., Научн. тр. Ташкентск. ун-та, 320, 54 (1968).
4. Ваарманн О., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 22, № 4, 343 (1973).
5. Настас Н. К., Приближ. решение уравнений, Кишинев, 1973, с. 70.
6. Бартиш М. Я., Сиб. матем. ж., XIII, № 3, 703 (1972).
7. Роозе А., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 22, 431 (1973).
8. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 16, 146 (1967).
9. Бартиш М. Я., № 5653-73 деп., Новосибирск, 1973.
10. Полль В., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 22, 409 (1973).


*Институт кибернетики*
*Академии наук Эстонской ССР*

Поступила в редакцию
1/III 1974