EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.4.09

УДК 532.525.2+532.584.1

М. ЛААТС, Ф. ФРИШМАН

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ СВОБОДНОГО ДВУХФАЗНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Распространение методов и представлений механики сплошных сред на неоднородные по составу течения тем оправданнее, чем меньше макродискретность системы. Для мелкодисперсного потока типа «газ — твердые частицы (или капли)» такой подход вполне апробирован.

В последнее время вопросы турбулентности однородного по структуре изотропного двухфазного течения широко разрабатываются. Исследования показывают, что инерционная примесь не пассивна, а оказывает обратное влияние на турбулентность несущего потока. В частности, это верно и для двухфазной струи [1, 2], что обусловило появление теоретических моделей, объясняющих обратное влияние примеси на струйную турбулентность [3, 4]. Представляется целесообразным получить выражение для турбулентных касательных напряжений в струйном пограничном слое. Для потока со сдвигом единственно возможным является, видимо, полуэмпирический подход.

Общие уравнения движения неоднородной по составу смеси [5] по форме не отличаются от известных уравнений гидромеханики, однако параметры в них учитывают характер неоднородности и обусловленные ею свойства в соответствии с массовой долей компонентов.

Для не очень концентрированного потока типа «газ — твердые частички», когда плотность твердой фазы ϱ_s превышает плотность несущей жидкости на три порядка (так наз. слабозапыленные потоки и газовзвеси [6]), уравнения [5] значительно упрощаются, поскольку объемная доля твердой фазы очень мала $\beta \ll 1$. Весь опыт исследования различных аспектов такого течения [7, 8] показывает, что взаимодействием частиц, т. е. напряжениями в твердой фазе, можно пренебречь. Специфика системы — большие ускорения, на порядок превышающие g — позволяет пренебречь гравитационной силой, внешние силовые поля здесь для простоты не рассматриваются. Если массу данной фазы в единице объема назвать плотностью распределения, то плотность распределения твердой фазы $\varrho_{sd} = \beta\varrho_s$, а газовой — $\varrho_d = (1-\beta)\varrho$. Отличительным свойством рассматриваемой системы является то, что плотность распределения ϱ_d (по [7] «кажущаяся плотность газовой фазы») практически совпадает с физической плотностью газовой фазы ϱ и истинная массовая концентрация $\alpha = \varrho_{sd}\varrho_d^{-1}$.

Для установившегося течения рассматриваемой двухфазной смеси уравнения движения, записанные для актуальных параметров, имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_j} \varrho (U_i U_j + \alpha U_{si} U_{sj}) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i}, \\
&\frac{\partial}{\partial x_j} \varrho (U_j + \alpha U_{sj}) = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial x_j} \varrho \alpha U_{sj} = 0.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Первое уравнение системы (1) — это уравнение количества движения, второе — сохранение массы смеси, третье — сохранение массы примеси. Здесь и далее U_i и U_{si} — компоненты вектора скорости несущей и твердой фазы соответственно, индекс s обозначает твердую фазу.

Порядок дальнейших преобразований аналогичен известным действиям, принятым при выводе уравнений, однородных по составу турбулентных течений. Заменяя актуальные параметры суммой их осредненных и пульсационных значений ($P = \bar{P} + P'$), произведя осреднение и пренебрегая по известному принципу молекулярной вязкостью, для турбулентного течения несжимаемой жидкости получаем систему уравнений (2):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x_j} \varrho (\bar{U}_i \bar{U}_j + \bar{\alpha} \bar{U}_{si} \bar{U}_{sj}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \varrho \bar{U}_{si} \overline{\alpha' u'_{sj}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \varrho \bar{U}_{sj} \overline{\alpha' u'_{si}} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial x_j} \varrho (\overline{u'_i u'_j} + \bar{\alpha} \overline{u'_{si} u'_{sj}}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \varrho \overline{\alpha' u'_{si} u'_{sj}} = -\frac{\partial p}{\partial x_i}, \\
&\frac{\partial}{\partial x_j} \varrho (\bar{U}_j + \overline{\alpha U_{sj}}) + \frac{\partial}{\partial x_j} \varrho \overline{\alpha' u'_{sj}} = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial x_j} \varrho \overline{\alpha U_{sj}} + \frac{\partial}{\partial x_j} \varrho \overline{\alpha' u'_{sj}} = 0.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

Используя обычные допущения пограничного слоя, исходящие из «сосредоточения течения в узкой области» [9], после оценки порядка величины полных уравнений получаем систему уравнений (3):

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x} \varrho (U^2 + \alpha U_S^2) + \frac{\partial}{\partial y} \varrho (UV + \alpha U_S V_S + U_S \overline{\alpha' v'_S}) = \\
&= -\frac{dp}{dx} - \frac{\partial}{\partial y} \varrho (\overline{u'v'} + \alpha \overline{u'_S v'_S}), \\
&\frac{\partial}{\partial x} \varrho (U + \alpha U_S) + \frac{\partial}{\partial y} \varrho (V + \alpha V_S + \overline{\alpha' v'_S}) = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial x} \varrho \alpha U_S + \frac{\partial}{\partial y} \varrho (\alpha V_S + \overline{\alpha' v'_S}) = 0.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Как это принято для течений с поперечным сдвигом, в (3) вместо тензорных индексных обозначений применяются различные обозначения для координат и компонентов. Для простоты записи черточки осреднения над осредненными величинами опущены.

Для замыкания системы необходимо задать связь между скоростями фаз в осредненном и пульсационном движениях, а также связать пульсационные параметры с осредненными. Для струйного течения теоретический путь, подобный примененному С. М. Ченом и Б. Т. Чао, не представляется перспективным, поскольку поле, в котором происходит взаимодействие фаз, не задано.

Скорости движения фаз связаны уравнением движения частиц(ы), развитая форма которого здесь не приводится (см., напр., [10]), поскольку для потока «газ — твердые частицы» сила сопротивления преобладает и правомерна его простейшая форма [7]:

$$\varrho_s \frac{\pi\delta^3}{6} \frac{dU}{d\tau} = C_f \frac{\pi\delta^2}{4} \varrho \frac{(U-U_S)^2}{2}. \tag{4}$$

Принимая для коэффициента сопротивления зависимость типа

$$C_f = A\,\mathrm{Re}_p^{-m}, \tag{5}$$

где $\mathrm{Re}_p = (U-U_S)\delta\nu^{-1}$, а $m=0{,}5$, одинаково хорошо аппроксимирующую классические опытные данные в области обтекания шара с проявлением инерционных сил и совпадающую с рекомендациями [6] для частиц неправильной формы, можно оценить относительные скорости фаз в двухфазной струе. Для частиц $\delta < (40 \div 50)\cdot 10^{-6}$ *м* они ограничиваются несколькими метрами в секунду. Это позволяет во многих случаях пренебречь осредненным относительным движением фаз ($U_S = U$), т. е. рассматривать осредненное движение равновесным.

Для равновесного осредненного движения уравнения (3) существенно упрощаются (тогда $\alpha \equiv \varkappa$, где $\varkappa$ — расходная массовая концентрация: $\varkappa = \varrho_{sd} U_S (\varrho U)^{-1}$):

$$\frac{\partial}{\partial x}\varrho U^2(1+\varkappa) + \frac{\partial}{\partial y}\varrho(1+\varkappa)V_1 = -\frac{dp}{dx} - \frac{\partial}{\partial y}\varrho\overline{u'v'}\left(1+\varkappa\frac{v'_S}{v'}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\varrho U(1+\varkappa) + \frac{\partial}{\partial y}\varrho(1+\varkappa)V_1 = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\varrho U\varkappa + \frac{\partial}{\partial y}\varrho V\varkappa = -\frac{\partial}{\partial y}\varrho\frac{\overline{\varkappa' v'_S}}{1+\varkappa}.$$

Здесь $V_1 = V\left(1+\frac{\overline{\varkappa' v'_S}}{1+\varkappa}\frac{1}{V}\right)$ — так наз. эффективная скорость, которая в виде $V_* = V\left(1+\frac{\overline{\varrho' v'}}{\varrho}\frac{1}{V}\right)$ применяется в теории газовых струй — некое искусственное объединение осредненных и пульсационных величин, правомерное, если пульсации плотности (концентрации) невелики [11].

Последний член в правой части первого уравнения (6) представляет собой турбулентные касательные напряжения. Принимая обычное допущение $u' = v'$, получаем

$$\frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} = -\frac{\partial}{\partial y}\varrho\overline{v'^2}\left(1+\varkappa\frac{v'_S}{v'}\right). \tag{7}$$

Согласно Г. Н. Абрамовичу [3], конечные пульсационные скорости фаз газового моля связаны соотношением

$$v' + \varkappa v'_S = v'_0, \tag{8}$$

где v'_0 — начальная скорость движения газового моля в двухфазном течении.

Тогда (7) можно переписать:

$$\frac{\partial}{\partial y}\tau_{xy} = -\frac{\partial}{\partial y}\varrho\frac{v'}{v'_0}v'^2_0 \tag{9}$$

или

$$\tau_{xy} = -\varrho \frac{v'}{v'_0} v'^2_0.$$

Применяя следствия отмеченной выше работы [3] и в качестве модели турбулентности газовой фазы используя теорию пути смешения Прандтля

$$v'_0 (= u'_0) = l \frac{\partial U}{\partial y}, \tag{10}$$

где l — путь смешения в двухфазной струе, получаем

$$\tau_{xy} = -\varrho l \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \frac{1 + \varkappa \dfrac{u_\Delta}{v'_0}}{1+\varkappa}, \tag{11}$$

где u_Δ — относительная скорость фаз в конце жизни газового моля: $u_\Delta = v' - v'_s$.

Формула (11) для турбулентных касательных напряжений получена для равновесного осредненного движения, а в рамках принятой полуэмпирической модели — неравновесного пульсационного движения.

Если с самого начала, до осреднения уравнения, принять допущение о равновесности (т. е. исходить из уравнений однородного пограничного слоя, применяя понятие «эквивалентной плотности» $\varrho_* = \varrho(1+\varkappa)$), то выражение для касательных напряжений будет несколько иным [12]:

$$\tau_{xy} = -\varrho_* l^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{1 + \varkappa \dfrac{u_\Delta}{v'_0}}{1+\varkappa} \right). \tag{12}$$

Для мелких частиц, которые разгоняются за время жизни газового моля ($u_\Delta = 0$), выражения (11) и (12) совпадают, для более же инерционных частиц они не равноценны.

Как показано в [13], определенная интерпретация опытных данных [2] по интенсивности турбулентности в двухфазной струе также приводит к выражению (11).

Применяя при определении u_Δ для коэффициента сопротивления формулу (5), можно получить равенство

$$\sqrt{\frac{u_\Delta}{v'_0}} = \psi - \sqrt{\psi^2 - 1}, \tag{13}$$

где $$\psi = 1 + \frac{3\varrho k v^{0,5}}{16 \varrho p \delta^{1,5}} (1+\varkappa)^2 \frac{l}{(v'_0)^{0,5}}.$$

Анализ экспериментальных данных совместно с расчетами по (13) показывает, что для более крупной примеси ($u_\Delta \neq 0$) выражение (11) согласуется с имеющимся экспериментальным материалом несколько лучше.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лаатс М. К., Фришман Ф. А., Изв. АН СССР, МЖГ, № 2 (1970).
2. Лаатс М. К., Фришман Ф. А., Изв. АН СССР, МЖГ, № 2 (1973).
3. Абрамович Г. Н., ДАН СССР, **190**, № 5 (1970).
4. Owen P. R., J. Fluid Mech., **39**, 2 (1969).
5. Баренблатт Г. И., ПММ, XVII (1953).
6. Горбис З. Р., Теплообмен и гидромеханика дисперсных сквозных потоков, М., 1970.
7. Соу С., Гидродинамика многофазных систем, М., 1971.
8. Torobin L. B., Gauwin W. H., Can. J. Chem. Eng., Dec. (1960).

9. Таунсенд А. А., Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом, М., 1956.
10. Хинце И. О., Турбулентность, ее механизм и теория, М., 1963.
11. Гиневский А. С., Теория турбулентных струй и следов, М., 1969.
12. Абрамович Г. Н., Бажанов В. И., Горшович Т. А., Изв. АН СССР, МЖГ, № 6 (1972).
13. Лаатс М., Фришман Ф., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 271 (1974).

Институт термофизики и электрофизики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
4/I 1974

M. LAATS, F. FRIŠMAN

VABA HIIBSE PIIRIKIHI DIFERENTSIAALVÕRRANDITEST

Töös on tuletatud raskeid osakesi kandva hiibse turbulentse piirikihi diferentsiaalvõrrandid. On näidatud, et suhtelise liikumise järjekindel arvestamine võimaldab tuntud segunemistee mudeli raames saada avaldise turbulentsete nihkepingete jaoks, mis on heas kooskõlas katseandmetega turbulentsuse intensiivsusest hiibses jaos.

M. LAATS, F. FRISHMAN

ON DIFFERENTIAL EQUATIONS OF FREE TWO-PHASE BOUNDARY LAYER

Differential equations of non-equilibrium two-phase ("gas — solid particles") turbulent boundary layer have been derived. It is shown that consecutive accounting of non-equilibrity of the turbulent motion components of the phases within the limits of the "mixing-length" model allows to obtain an expression for turbulent shear stresses that is in rather good agreement with experimental data on the turbulence intensity of the two-phase jet.