EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 4
https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.4.08

УДК 531.51

А. КОППЕЛЬ

О НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ ПРЕДЕЛЕ СТАЦИОНАРНЫХ ДВУХПЕРЕМЕННЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ЭЙНШТЕЙНА

На основе строгого анализа нерелятивистского предела релятивистской теории гравитации Эйнштейна, проведенного Х. Кересом [1–4], разработан конкретный метод нахождения нерелятивистских аналогов стационарных релятивистских гравитационных полей, описываемых двухпеременной метрической формой. Найденные формулы позволяют проанализировать физический смысл довольно обширного класса конкретных двухпеременных решений уравнений Эйнштейна. Сюда принадлежат, например, класс решений типа Керра-Тауба-НУТ [5–6], стационарные решения типа Льюиса—Папапетру [7–8], статические решения класса Вейля [9] и некоторые другие.

1. Постановка задачи

Будем называть *двухпеременными* (ДП) релятивистские гравитационные поля (Г-поля), допускающие в искривленном пространстве-времени такую специальную голономную систему координат, относительно которой компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ не зависят от двух координат* (допустим от x^A). Метрическую форму ds^2 пространства-времени, данную в этих специальных координатных системах, для краткости будем называть *ДП формой.* Как известно, к таким формам приводит исследование центрально-симметричных, стационарных и статических аксиально-симметричных, а также некоторых типов нестатических Г-полей (например, полей с плоскими или цилиндрическими волнами). ДП формы связаны между собой преобразованиями координат, которые являются комбинациями следующих более простых преобразований:

$$x^{L'}=f^L(x^M), \qquad x^{A'}=x^A; \tag{1.1}$$

$$x^{L'}=x^L, \qquad x^{A'}=x^A+f^A(x^L); \tag{1.2}$$

$$x^{L'}=x^L, \qquad x^{A'}=a^A_B x^B+a^A_0. \tag{1.3}$$

Здесь f^L и f^A некоторые функции координат x^L, обладающие необходимыми свойствами дифференцируемости, а a^A_B, a^A_0 — постоянные.

Можно убедиться, что если при ДП Г-полях имеет место

$$\det\|\alpha_{AB}\|\equiv\det\|g_{AB}\|=\det\|g_{\mu\nu}\|\cdot\det\|g^{LM}\|\neq 0 \tag{1.4}$$

и

$$(g^{AL}\beta_{L1})_{,2}-(g^{AL}\beta_{L2})_{,1}=0, \tag{1.5}$$

причем величины β_{LM} определяются из условий

---

* В данной работе прописные латинские индексы начала алфавита пробегают значения 0 и 3, прописные латинские индексы середины алфавита — значения 1 и 2, строчные латинские индексы — значения 1, 2, 3, а греческие индексы — значения 0, 1, 2, 3. Запятая с последующим индексом означает дифференцирование по соответствующей координате.

$$\beta_{LM} g^{MN} = \delta^N_L, \tag{1.6}$$

то с помощью преобразований типа (1.2) всегда возможен переход в голономную систему координат, в которой метрическая форма имеет вид

$$ds^2 = \alpha_{AB}\, dx^A\, dx^B + \beta_{LM}\, dx^L\, dx^M. \tag{1.7}$$

Такую ДП форму будем называть *ДП $\alpha\beta$-формой.* Отметим, что общая структура формы (1.7), т. е. свойство $g_{AL} = 0$, инвариантна относительно преобразований типа (1.1) и (1.3).

В данной работе будем рассматривать ДП $\alpha\beta$-формы, при которых имеет место

$$\det \|\alpha_{AB}\| = -D^2 < 0. \tag{1.8}$$

Будем называть такие метрические формы *стационарными*, так как при них можно толковать координату x^0 как временную и с их помощью можно описывать стационарные Г-поля. Кроме того, будем иметь в виду, что без ограничения общности с помощью преобразований типа (1.1) стационарная метрическая форма (1.7) всегда приводима к виду

$$ds^2 = \alpha_{AB}\, dx^A\, dx^B + \exp(2B)\, \delta_{LM}\, dx^L\, dx^M. \tag{1.9}$$

Как известно, такая стационарная координатная система (особенно ее частный случай, называемый системой с каноническими координатами Вейля [9] или Льюиса [7]) обладает несколькими замечательными свойствами математической простоты и в ней удобно проводить вычисления для многих задач релятивистской теории гравитации, но в то же время нахождение физической интерпретации результатов вычислений здесь часто представляет немалые трудности.

Вводя новую временную координату, так наз. *ньютоново время*

$$t = F(x^0, x^i), \tag{1.10}$$

удовлетворяющую уравнению

$$g^{\mu\nu} F_{,\mu} F_{,\nu} = -\frac{1}{c^2}, \tag{1.11}$$

можно перейти от любой метрической формы искривленного пространства-времени к так наз. *$cv\gamma$-форме* вида

$$ds^2 = -(c^2 - v_s v^s)\, dt^2 + 2v_s\, dx^s\, dt + \gamma_{sp}\, dx^s\, dx^p. \tag{1.12}$$

Не меняя общей структуры такой метрической формы, путем преобразований координат она всегда приводима к так наз. *G-форме* (*G-системе*), в которой существуют конечные предельные значения

$$\tilde{v}_i \equiv \lim_{c\to\infty} v_i, \quad \tilde{\gamma}_{ik} \equiv \lim_{c\to\infty} \gamma_{ik} \tag{1.13}$$

и при этом

$$\det \|\tilde{\gamma}_{ik}\| \neq 0. \tag{1.14}$$

Как известно [1–4], с помощью G-систем в принципе можно найти нерелятивистский предел любого релятивистского Г-поля и в свою очередь нерелятивистские аналоги могут быть полезными для толкования этих релятивистских решений уравнений поля. Отметим, что метод изучения предельного нерелятивистского Г-поля применялся, например, для толкования известного решения Керра [3].

Задачу нахождения нерелятивистских аналогов можно поставить также в случае любых стационарных ДП Г-полей. К сожалению, отыскивание общего решения уравнения (1.11) при произвольной конкретной ДП форме и получение с его помощью соответствующей конкретной $c\upsilon\gamma$-формы наталкивается на большие математические трудности. Но в то же время не исключено, что нахождение нерелятивистских пределов стационарных ДП Г-полей оказывается возможным уже с помощью некоторого частного вида функции преобразования F (1.10).

Исходя из сказанного выше, в данной работе поставим задачу нахождения нерелятивистских Г-полей, соответствующих стационарным ДП Г-полям, которые описываются с помощью ДП $\alpha\beta$-формы вида (1.9), при следующих предположениях: переход к $c\upsilon\gamma$-форме осуществим с помощью частной комбинации преобразований (1.2) и (1.3):

$$t=\frac{x^0}{c}+f^0(x^1,\ x^2),\qquad x^{i'}=x^i, \tag{1.15}$$

и полученная ДП $c\upsilon\gamma$-форма будет G-формой с точностью до частных преобразований типа (1.1) и (1.3):

$$x^1=f^1(x^{1'}),\qquad x^2=f^2(x^{2'}),\qquad x^3=a_3x^{3'}+a_0. \tag{1.16}$$

2. Переход от ДП $\alpha\beta$-формы к ДП $c\upsilon\gamma$-форме

В случае стационарной ДП $\alpha\beta$-формы вида (1.9) и преобразования (1.15) уравнение (1.11) принимает вид

$$\alpha^{00}+1+c^2\exp(-2B)\left[(f^0_{,1})^2+(f^0_{,2})^2\right]=0. \tag{2.1}$$

Из формул преобразований для ковариантных составляющих метрического тензора имеем дополнительно

$$\upsilon_s\upsilon^s=c^2(1+\alpha_{00}), \tag{2.2}$$

$$\upsilon_L=-c^2f^0_{,L}\,\alpha_{00}, \tag{2.3}$$

$$\upsilon_3=c\alpha_{03}, \tag{2.4}$$

$$\gamma_{33}=\alpha_{33}, \tag{2.5}$$

$$\gamma_{3L}=-c\overset{0}{f}_{,L}\alpha_{03}, \tag{2.6}$$

$$\gamma_{LM}=\beta_{LM}+c^2\overset{0}{f}_{,L}\overset{0}{f}_{,M}\alpha_{00}, \tag{2.7}$$

где

$$\beta_{LM}=\exp(2B)\,\delta_{LM}. \tag{2.8}$$

Заметим, что в данном случае получаемая $c\upsilon\gamma$-форма жесткая, т. е. коэффициенты метрической формы ее зависят от ньютонова времени t.

Интегрирование уравнения (2.1) все-таки довольно сложная проблема. Решения в замкнутом виде можно получить только в относительно простых случаях. Но поскольку для нахождения $c\upsilon\gamma$-формы нужны лишь производные $f^0_{,L}$, то предложим здесь метод, позволяющий обойти прямое интегрирование уравнения (2.1).

Отметим, что с учетом (1.8) для нетривиальных случаев из (2.1) следует условие

$$\alpha_{33}=-\alpha^{00}D^2>D^2. \tag{2.9}$$

Учитывая это, можем полагать

$$f^0_{,1}=\frac{1}{c}\left[D^{-2}\beta_{11}(\alpha_{33}-D^2)\right]^{1/2}\sin\theta, \tag{2.10}$$

$$f^0_{,2}=\frac{1}{c}\left[D^{-2}\beta_{22}(\alpha_{33}-D^2)\right]^{1/2}\cos\theta, \tag{2.11}$$

где θ некоторая функция координат x^L. Теперь уравнение (2.1) удовлетворяется тождественно, а из условия интегрируемости соотношений (2.10) и (2.11) следует уравнение для функции θ.

При переходе с помощью преобразований (1.16) в новую координатную систему операторы дифференцирования преобразуются по следующему правилу:

$$\frac{\partial}{\partial x^1} = (f^1_{,1'})^{-1} \frac{\partial}{\partial x^{1'}}, \quad \frac{\partial}{\partial x^2} = (f^2_{,2'})^{-1} \frac{\partial}{\partial x^{2'}}. \tag{2.12}$$

Учитывая это и имея в виду формулы преобразования составляющих метрического тензора, видим, что, кроме добавляющегося штриха при индексах, вид формул (2.2)—(2.7) не меняется, причем

$$\alpha_{03'} = a_3 \alpha_{03}, \quad \alpha_{3'3'} = (a_3)^2 \alpha_{33} \tag{2.13}$$

и

$$\beta_{L'M'} = \exp(2B)\left[(f^1_{,1'})^2 \delta^{1'}_{L'} \delta^{1'}_{M'} + (f^2_{,2'})^2 \delta^{2'}_{L'} \delta^{2'}_{M'}\right]. \tag{2.14}$$

Хотя в дальнейшем для простоты мы будем пользоваться прежде всего величинами ДП $cv\gamma$-формы до преобразований (1.16), следует иметь в виду, что с помощью формул (2.12)—(2.14) переход к новым операторам дифференцирования и величинам $\alpha_{A'B'}$, $\beta_{L'M'}$ возможен всегда. По существу такой переход означает преобразование исходной ДП $\alpha\beta$-формы (1.9) в более общую ДП $\alpha\beta$-форму типа (1.7).

3. Переход к нерелятивистской метрической форме

Для того чтобы (до или после преобразований (1.16)) получаемая ДП $cv\gamma$-форма (1.12) с метрическими коэффициентами (2.2)—(2.7) была G-формой, необходимо выполнение условий

$$v_s v^s = \tilde{w} + h, \quad v_i = \tilde{v}_i + h_i, \quad \gamma_{ik} = \tilde{\gamma}_{ik} + h_{ik}, \tag{3.1}$$

где

$$\tilde{w} = \tilde{v}_s \tilde{v}_p \tilde{\gamma}^{sp} \neq 0. \tag{3.2}$$

Функции h, h_i, h_{ik} представляют собой разложения по обратным степеням величины c, так что имеет место

$$\tilde{h} = \tilde{h}_i = \tilde{h}_{ik} = 0. \tag{3.3}$$

Здесь $\tilde{h} \equiv \lim\limits_{c\to\infty} h$ и т. д. Из формул (3.1)—(3.3) в свою очередь вытекают условия для структуры метрических коэффициентов ДП $\alpha\beta$-формы.

С учетом соотношений (3.1), формул (2.2), (2.4) и (2.5) получаем соответственно

$$\alpha_{00} = -1 + \frac{1}{c^2}[\tilde{w} + h], \tag{3.4}$$

$$\alpha_{03} = \frac{1}{c}[\tilde{v}_3 + h_3], \tag{3.5}$$

$$\alpha_{33} = \tilde{\gamma}_{33} + h_{33}. \tag{3.6}$$

С другой стороны, на основе этих формул из данных метрических коэффициентов α_{AB} определяются предельные значения $\tilde{w}$, $\tilde{v}_3$ и $\tilde{\gamma}_{33}$. При этом видим, что имеет место

$$D^2 = -\alpha_{00}\alpha_{33} + (\alpha_{03})^2 = \tilde{\gamma}_{33} + h_{33} - \frac{1}{c^2}\{\tilde{w}\tilde{\gamma}_{33} - (\tilde{v}_3)^2 +$$

$$+ h[\tilde{\gamma}_{33} + h_{33}] + \tilde{w} h_{33} - 2\tilde{v}_3 h_3 - (h_3)^2\} = \tilde{\gamma}_{33} + O\left(\frac{1}{c}\right) \tag{3.7}$$

и

$$D^{-2}(a_{33}-D^2)=\frac{1}{c^2}\left[\tilde\gamma_{33}+O\left(\frac{1}{c}\right)\right]^{-1}\left[\tilde w\tilde\gamma_{33}-(\tilde v_3)^2+O\left(\frac{1}{c}\right)\right], \tag{3.8}$$

откуда

$$\tilde\gamma_{33}=(\tilde D)^2. \tag{3.9}$$

С учетом (3.4) из (2.3) и (3.1) получаем формулы для структуры производных $f^0{}_{,L}$:

$$c^2f^0{}_{,L}=\left[1-\frac{1}{c^4}(\tilde w+h)^2\right]^{-1}\left[\tilde v_L+h_L+\frac{1}{c^2}(\tilde v_L+h_L)(\tilde w+h)\right]. \tag{3.10}$$

Отсюда очевидно

$$\tilde v_L=\lim_{c\to\infty}(c^2f^0{}_{,L})\equiv\varphi_{,L}. \tag{3.11}$$

Затем для определения составляющих тензора $\tilde\gamma_{ik}$ из формул (2.6) и (2.7) находим

$$\beta_{11}=\tilde\gamma_{11}+h_{11}+\frac{1}{c^2}(c^2f^0{}_{,1})^2\left[1-\frac{1}{c^2}(\tilde w+h)\right], \tag{3.12}$$

$$\beta_{22}=\tilde\gamma_{22}+h_{22}+\frac{1}{c^2}(c^2f^0{}_{,2})^2\left[1-\frac{1}{c^2}(\tilde w+h)\right], \tag{3.13}$$

$$0=\beta_{12}=\tilde\gamma_{12}+h_{12}+\frac{1}{c^2}(c^2f^0{}_{,1})(c^2f^0{}_{,2})\left[1-\frac{1}{c^2}(\tilde w+h)\right], \tag{3.14}$$

$$0=\tilde\gamma_{L3}+h_{L3}+\frac{1}{c^2}(c^2f^0{}_{,L})(\tilde v_3+h_3). \tag{3.15}$$

Поскольку отсюда вытекает

$$\tilde\gamma_{13}=\tilde\gamma_{23}=\tilde\gamma_{12}=0, \tag{3.16}$$

то для удовлетворения условия (1.14) должно выполняться

$$\tilde\gamma_{11}=\tilde\beta_{11}\neq 0,\qquad \tilde\gamma_{22}=\tilde\beta_{22}\neq 0,\qquad \tilde\gamma_{33}=(\tilde D)^2\neq 0. \tag{3.17}$$

Учитывая (3.8), (3.11) и (3.17), из формул (2.10) и (2.11) находим

$$\tilde v_1=\varphi_{,1}=(\tilde D)^{-1}\{\tilde\beta_{11}[\tilde w(\tilde D)^2-(\tilde v_3)^2]\}^{1/2}\sin(\tilde\theta), \tag{3.18}$$

$$\tilde v_2=\varphi_{,2}=(\tilde D)^{-1}\{\tilde\beta_{22}[\tilde w(\tilde D)^2-(\tilde v_3)^2]\}^{1/2}\cos(\tilde\theta), \tag{3.19}$$

откуда, в силу условия интегрируемости, получаем уравнение для $\tilde\theta$. Из полученных формул видим, что действительно имеет место

$$\tilde\gamma^{sp}\tilde v_s\tilde v_p=(\tilde\beta_{11})^{-1}(\varphi_{,1})^2+(\tilde\beta_{22})^{-1}(\varphi_{,2})^2+(\tilde D)^{-2}(\tilde v_3)^2=\tilde w. \tag{3.20}$$

4. Формулы для нерелятивистского Г-поля

Выше получены общие формулы для нахождения метрических форм, описывающих нерелятивистские Г-поля и соответствующих при сделанных предположениях исследуемым релятивистским Г-полям. Теперь более подробно исследуем такую предельную метрическую форму.

Уравнения нерелятивистского Г-поля, получаемые из уравнений Эйнштейна в пределе $c\to\infty$, имеют следующий вид [1-4]:

$$\tilde{P}_{ik}=0, \tag{4.1}$$

$$\tilde{\Gamma}^s_{is,0}-\tilde{\Gamma}^s_{i,s}+\tilde{\Gamma}^s_p\tilde{\Gamma}^p_{si}-\tilde{\Gamma}^s_{ps}\tilde{\Gamma}^p_i=0, \tag{4.2}$$

$$\tilde{\Gamma}^s_{s,0}-\tilde{\Gamma}^s_{,s}+\tilde{\Gamma}^s_p\tilde{\Gamma}^p_s-\tilde{\Gamma}^s_{ps}\tilde{\Gamma}^p=-4\pi G\varrho, \tag{4.3}$$

где

$$\tilde{\Gamma}_p=\tilde{v}_{p,0}-\frac{1}{2}\tilde{w}_{,p},\quad \tilde{\Gamma}_{kp}=\tilde{\Omega}_{kp}+\frac{1}{2}\tilde{\gamma}_{kp,0},\quad \tilde{\Omega}_{kp}=\tilde{v}_{[p,k]}, \tag{4.4}$$

а $\tilde{\Gamma}^i=\tilde{\gamma}^{ip}\tilde{\Gamma}_p$, $\tilde{\Gamma}^s_k=\tilde{\gamma}^{sp}\tilde{\Gamma}_{kp}$, $\tilde{\Gamma}^l_{ik}$ — коэффициенты Кристоффеля 3-пространства с метрическим тензором $\tilde{\gamma}_{ik}$, $\tilde{P}_{ik}$ — тензор Риччи этого пространства, ϱ — плотность массы и G — ньютонова гравитационная постоянная.

Из уравнения (4.1) вытекает, что жесткое 3-пространство с метрическим тензором $\tilde{\gamma}_{ik}$ эвклидово. Отсюда получаются общие условия для предельных величин $\tilde{\gamma}_{ik}$. При этом нужно различать два случая: 1) $\tilde{\gamma}_{33}=(\tilde{D})^2=\mathrm{const}$ и 2) $\tilde{\gamma}_{33}=(\tilde{D})^2\neq\mathrm{const}$.

Если

$$\tilde{D}=\mathrm{const}, \tag{4.5}$$

то с учетом (2.8) получается уравнение

$$\tilde{B}_{,1,1}+\tilde{B}_{,2,2}=0. \tag{4.6}$$

Итак, в 3-пространстве имеем так наз. общие ортогональные цилиндрические координаты, получаемые из двумерных плоских криволинейных координат x^L (полярных, эллиптических и т. д.) посредством присоединения декартовой координаты $z=x^3$, перпендикулярной к x^1x^2-плоскости [10]. Частным случаем при $\tilde{D}=1$ и $\tilde{B}=0$ являются декартовые координаты. Следовательно, при $\tilde{D}=\mathrm{const}$ предельное нерелятивистское Г-поле определяется двумерной плоской задачей.

Если

$$\tilde{D}\neq\mathrm{const}, \tag{4.7}$$

то с учетом (2.8) получаются уравнения

$$\tilde{D}_{,1,1}+\tilde{D}_{,2,2}=0, \tag{4.8}$$

$$\exp(2\tilde{B})=(\tilde{D}_{,1})^2+(\tilde{D}_{,2})^2. \tag{4.9}$$

Имеем ортогональные вращательно-симметричные координаты, получаемые из соответствующих плоских криволинейных координат x^L (полярных, эллиптических и т. д.) при помощи вращения на угол $\varphi=x^3$ вокруг оси симметрии [10]. Например, при $\tilde{D}=x^1$ частным случаем являются круговые цилиндрические координаты, а при $\tilde{D}=\exp(x^1)\sin(x^2)$ — сферические координаты, причем в стандартный вид последние приводятся с помощью преобразования $x^{1'}=\exp(x^1)$. Таким образом, при $\tilde{D}\neq\mathrm{const}$ предельное нерелятивистское Г-поле обладает аксиальной симметрией или, в частном случае, сферической симметрией.

Для того чтобы сделать выводы из остальных уравнений поля (4.2) и (4.3), будем иметь в виду, что наши предельные значения $\tilde{v}_i$ и $\tilde{\gamma}_{ik}$ не зависят ни от времени t, ни от координаты x^3. Кроме того, в силу условия интегрируемости соотношений (3.18) и (3.19), имеет место

$$\tilde{\Omega}_{12}=\tilde{v}_{[1,2]}=0, \tag{4.10}$$

а

$$\tilde{\Omega}_{L3}=-\tilde{\Omega}_{3L}=\frac{1}{2}\tilde{v}_{3,L}. \tag{4.11}$$

С учетом упомянутого выше, уравнение (4.2) принимает вид

$$[(\tilde{D})^{-1}\tilde{v}_{3,1}]_{,1}+[(\tilde{D})^{-1}\tilde{v}_{3,2}]_{,2}=0. \tag{4.12}$$

Следуя общей схеме, данной в работе [2], в настоящем случае можно определить новую функцию ψ с помощью соотношений

$$\psi_{,1}=\frac{1}{2}(\tilde{D})^{-1}\tilde{v}_{3,2},\quad \psi_{,2}=-\frac{1}{2}(\tilde{D})^{-1}\tilde{v}_{3,1}. \tag{4.13}$$

Теперь уравнение (4.12) как условие интегрируемости для этих соотношений выполняется автоматически. Кроме того, отсюда следует

$$\Delta\psi\equiv(\tilde{D})^{-1}\exp(-2\tilde{B})[(\tilde{D}\psi_{,1})_{,1}+(\tilde{D}\psi_{,2})_{,2}]=0, \tag{4.14}$$

где символ Δ означает оператор Лапласа для исследуемого 3-пространства с метрическим тензором $\tilde{\gamma}_{ik}$.

Поскольку в силу (4.13) имеет место

$$\Delta(\psi^2)=\frac{1}{2}(\tilde{D})^{-2}\exp(-2\tilde{B})[(\tilde{v}_{3,1})^2+(\tilde{v}_{3,2})^2], \tag{4.15}$$

то уравнение (4.3) принимает вид

$$\Delta\Phi=4\pi G\varrho, \tag{4.16}$$

где

$$\Phi=-\frac{1}{2}\tilde{w}+\psi^2. \tag{4.17}$$

Согласно общей теории [2–4], исследуемое нерелятивистское Г-поле является *неньютоновым* (вихревым), если в декартовых координатах $\overline{y^k}=\overline{y^k}(x^l)$ имеет место

$$\psi_{,\bar{i},\bar{k}}\neq 0. \tag{4.18}$$

В противном случае ($\psi_{,\bar{i},\bar{k}}=0$) с помощью преобразования координат всегда можно сделать $\tilde{\Omega}_{ik}=0$. В силу (4.13) тогда получается также $\psi=\psi(t)$. В этом случае нерелятивистское Г-поле *ньютоново* и в силу формул (4.17) величина $-\frac{1}{2}\tilde{w}$ определяет ньютонов потенциал Г-поля с точностью определенного калибровочного преобразования.

5. Заключение

Итак, при определенных упрощающих предположениях получены формулы для нахождения предельного нерелятивистского Г-поля в случае релятивистской стационарной ДП метрической формы. С помощью этих формул можно проанализировать физический смысл довольно обширного класса конкретных ДП решений уравнений Эйнштейна. Сюда принадлежат, например, класс решений типа Керра—Тауба-НУТ [5, 6], стационарные решения типа Льюиса—Папапетру [7, 8], статические решения класса Вейля [9] и некоторые другие. Отметим, что уже опубликованы [11] некоторые результаты применения формул приведенного выше типа для анализа некоторых новых конкретных точных решений уравнений Эйнштейна с ортогональной метрической формой, но при этом постановка задачи была более специальна.

Следует подчеркнуть, что подход к результатам настоящей работы возможен и с иной стороны. На основе формул, данных в разделе 4, можно поставить задачу нахождения также конкретных видов ДП метрических форм, описывающих стационарные нерелятивистские Г-поля, в том числе неньютоновы. Эту задачу можно решать по следующей схеме. Первоначально выбирается конкретная координатная система в эвклидовом 3-пространстве, т. е. выбираются конкретные виды функций $\tilde{D}$ и $\tilde{B}$, удовлетворяющие либо уравнениям (4.5) и (4.6), либо уравнениям (4.7)—(4.9). Затем на основе формул (4.14) и (4.16) определяются функции ψ и Φ, далее из соотношений (4.13) и (4.17) — $\tilde{v}_3$ и $\tilde{w}$, и наконец, с помощью (3.18) и (3.19) — $\tilde{v}_L = \varphi_{,L}$. При этом, конечно, особенно интересно выяснить, какие существуют неньютоновы нерелятивистские Г-поля данного типа. Не исключено, что знание конкретных видов нерелятивистских ДП Г-полей даст некоторые новые идеи для построения конкретных видов соответствующих релятивистских Г-полей.

Результаты конкретного применения данных здесь формул как для анализа специальных видов релятивистских метрических форм (решений уравнений Эйнштейна), так и для построения некоторых конкретных нерелятивистских метрических форм будут опубликованы в следующих работах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Керес Х., ЖЭТФ, **46**, 1741 (1964).
2. Керес Х., ЖЭТФ, **48**, 1319 (1965).
3. Керес Х., ЖЭТФ, **52**, 768 (1967).
4. Керес Х., Тезисы докл. 3-й Советской гравитационной конференции, Ереван, 1972, с. 71.
5. Kerr R. P., Phys. Rev. Letters, **11**, 237 (1963).
6. Miller J. G., J. Math. Phys., **14**, 486 (1973).
7. Lewis T., Proc. Roy. Soc., **A136**, 176 (1932).
8. Papapetrou A., Ann. der Phys., **12**, 309 (1953).
9. Weyl H., Ann. der Phys., **54**, 117 (1917).
10. Маделунг Э., Математический аппарат физики, М., 1960, с. 271—273.
11. Коппель А., Тр. ИФА АН ЭССР, № 33, 126 (1967).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 11/III 1974

A. KOPPEL

EINSTEINI VÕRRANDITE STATSIONAARSETE KAHEMUUTUJA LAHENDITE MITTERELATIVISTLIKUST PIIRJUHUST

Relativistliku gravitatsiooniteooria mitterelativistliku piirjuhu ranget analüüsi, mille alused on esitatud töödes [1–4], rakendatakse niisugust tüüpi statsionaarsete relativistlike gravitatsiooniväljade puhul, mida kirjeldab kahest muutujast sõltuvate kordajatega meetriline vorm. Tuletatakse valemid, mille abil on võimalik analüüsida ja füüsikaliselt tõlgendada laia Einsteini võrrandite lahendite klassi. Siia kuuluvad näiteks Kerri-Taubi-NUT tüüpi lahendid [5,6], Lewisi-Papapetrou tüüpi aksiaalsümmeetrilised statsionaarsed lahendid [7,8], Weyli tüüpi staatilised lahendid [9] jne.

A. KOPPEL

ON THE NON-RELATIVISTIC LIMIT OF STATIONARY TWO-VARIABLE SOLUTIONS OF EINSTEIN'S EQUATIONS

A certain method is developed for finding non-relativistic limit to the stationary relativistic gravitational field described by two-variable metric form. The method is based on H. Keres's works [1–4]. With the help of the formulae derived here, it is possible to analyse and interpret a wide class of solutions of Einstein's equations, e. g. the Kerr-Taub-NUT solutions [5,6], the Lewis-Papapetrou axially symmetric stationary solutions [7,8], the Weyl static solutions [9], and others.