EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.4.07

УДК 518.517.392

М. ЛЕВИН, В. АРРО

НАИЛУЧШАЯ КВАДРАТУРНАЯ ФОРМУЛА С ВЕСОВОЙ ФУНКЦИЕЙ x

Пусть n, r, M — заданные числа. На множествах функций $W^{(r)}L_\infty = \{f(x) : f^{(r-1)}$ абсолютно непрерывна, $\sup\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\mathrm{vrai}\,|f^{(r)}|\leqslant M\}$,

$$\mathop{W}_0^{(r)}L_\infty=\{f(x):\ f\in W^{(r)}L_\infty,\ f^{(i)}(0)=0\ \ (i=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1)\}$$

рассмотрим задачу построения соответственно наилучших [1] формул вида

$$\int_0^1 p(x)f(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n}\ \sum_{j=0}^{r-1}B_{kj}f^{(j)}(u_k)+E_n(f), \tag{1}$$

$$\int_0^1 p(x)f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n}\ \sum_{j=0}^{r-1}A_{kj}f^{(j)}(x_k)+R_n(f), \tag{2}$$

где $u_0=0$, $p(x)\equiv x$ *. Другими словами, найдем значения A_{kj}, x_k, B_{0j}, B_{kj}, u_k ($k=1,\ 2,\ \ldots,\ n$; $j=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1$) так, чтобы величины

$$E_n=\sup_{f\in W^{(r)}L_\infty}|E_n(f)|,\qquad R_n=\sup_{f\in W_0^{(r)}L_\infty}|R_n(f)|$$

имели наименьшие значения.

Ниже используем обозначения:

$$x_0=0,\ \ x_{n+1}=1,\ \ a_i=0{,}5(x_{i+1}+x_i),\ \ h_i=0{,}5(x_{i+1}-x_i)\quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ n),$$

$$t_l=\cos\frac{l+1}{r+1}\pi\quad (l=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1),$$

$$\omega(x)=\prod_{l=0}^{r-1}(x-t_l)=\frac{\sin(r+1)\arccos x}{2^r\sqrt{1-x^2}},$$

$$\varphi_p(t)=\frac{1}{(r-1)!}\int_t^1 p(x)\,(x-t)^{r-1}\,dx, \tag{3}$$

$Q_i(x)$ — интерполяционный многочлен Лагранжа степени $r-1$, построенный для функции $\varphi_p(h_ix+a_i)$ по узлам t_0, t_1, $\ldots$, t_{r-1} ($i=0,\ 1,\ \ldots,\ n-1$), $Q_n(x)\equiv 0$.

---

* Квадратурные формулы с весовой функцией x представляют интерес, например, при вычислении двойных интегралов в полярных координатах.

Обратимся к работе [2]. Результаты этой работы получены в предположении $p(x) > 0$ на $[0; 1]$ с помощью теоремы С. Н. Бернштейна ([3], с. 330—332). В случае $p(x) \equiv x$ результаты [2] также справедливы. Для обоснования этого достаточно убедиться, что при $p(x) \equiv x$ верна названная теорема С. Н. Бернштейна или, конкретно, выполнено неравенство

$$\int_0^{x_1} |\varphi_p(t) - \pi_0(t)|\, dt \geqslant h_0 \int_{-1}^{1} |\varphi_p(h_0 u + a_0) - Q_0(u)|\, du,$$

где $\pi_0(t)$ — произвольный многочлен степени $r-1$.

Пусть $a_\varepsilon = \frac{1}{2}(\varepsilon + x_1)$, $h_\varepsilon = \frac{1}{2}(x_1 - \varepsilon)$, $Q_\varepsilon(u)$ — многочлен Лагранжа, построенный для функции $\varphi_p(h_\varepsilon u + a_\varepsilon)$ по узлам $t_0, t_1, \ldots, t_{r-1}$. Тогда с помощью теоремы С. Н. Бернштейна [3] имеем

$$\int_0^{x_1} |\varphi_p(t) - \pi_0(t)|\, dt = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^{x_1} |\varphi_p(t) - \pi_0(t)|\, dt =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to +0} h_\varepsilon \int_{-1}^{1} |\varphi_p(h_\varepsilon u + a_\varepsilon) - \pi_0(h_\varepsilon u + a_\varepsilon)|\, du \geqslant$$

$$\geqslant \lim_{\varepsilon \to +0} h_\varepsilon \int_{-1}^{1} |\varphi_p(h_\varepsilon u + a_\varepsilon) - Q_\varepsilon(u)|\, du = h_0 \int_{-1}^{1} |\varphi_p(h_0 u + a_0) - Q_0(u)|\, du$$

и, следовательно, для случая $p(x) \equiv x$ результаты [2] верны.

Рассмотрим сначала задачу построения на множестве $W_0^{(r)} L_\infty$ наилучшей формулы (2), где $p(x) \equiv x$.

Согласно [2] и сделанному выше замечанию при фиксированных узлах $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqslant 1$ единственная наилучшая формула (2) (определяемая выбором весов A_{kj}), для которой величина R_n достигает наименьшего значения, имеет веса

$$A_{kj} = (-1)^{r-1-j} [h_{k-1}^{j+1-r} Q_{k-1}^{(r-1-j)}(1) - h_k^{j+1-r} Q_k^{(r-1-j)}(-1)] \tag{4}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n;\ j = 0, 1, \ldots, r-1)$$

и оценку остатка

$$R_n = M c_n, \tag{5}$$

где

$$c_n = \sum_{i=0}^{n-1} h_i \int_{-1}^{1} |\varphi_p(h_i u + a_i) - Q_i(u)|\, du + \int_{x_n}^{1} |\varphi_p(t)|\, dt. \tag{6}$$

Величина c_n есть функция от $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Таким образом, задача построения наилучшей формулы (2) будет решена, если удастся выбрать узлы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (0; 1]$ так, чтобы величина c_n приняла наименьшее значение.

Упростим выражение (6), учитывая, что $p(x) \equiv x$. В рассматриваемом случае по (3) находим

$$\varphi_p(t) = \frac{(-1)^r}{(r+1)!} (t-1)^r (t+r)$$

и, следовательно, $\varphi_p(t)$ есть многочлен степени $r+1$ с коэффициентом при t^r, равным нулю. Учитывая $Q_i(t_\nu) = \varphi_p(h_i t_\nu + a_i)$ ($\nu = 0, 1, \ldots, r-1$), имеем

$$\varphi_p(h_i u + a_i) - Q_i(u) = \frac{(-1)^r h_i^{r+1}}{(r+1)!}(u+\lambda_i)\,\omega(u).$$

Сравнивая здесь слева и справа коэффициенты при u^r, получаем значение $\lambda_i = (r+1)a_i/h_i$. Поэтому

$$\varphi_p(h_i u + a_i) - Q_i(u) = \frac{(-1)^r h_i^{r+1}}{(r+1)!}\left(u + \frac{(r+1)a_i}{h_i}\right)\omega(u).$$

Используя последнее равенство, неравенство

$$u + \frac{(r+1)a_i}{h_i} \geqslant -1 + \frac{(r+1)a_i}{h_i} = \frac{(r+1)a_i - h_i}{h_i} > 0 \quad (u \in [-1;\ 1])$$

и равенства

$$\int_{-1}^{1} u\,|\omega(u)|\,du = 0, \qquad \int_{-1}^{1} |\omega(u)|\,du = 2^{1-r},$$

получаем по (6)

$$c_n = \frac{1}{r!2^{2r+1}} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^{r+1}(x_{i+1} + x_i) + \frac{(1-x_n)^{r+1}(1+x_n+r)}{(r+2)!}. \tag{7}$$

Займемся поиском наименьшего значения величины (7).

Лемма 1. *Система*

$$\left\{\begin{array}{l} v_1^r\,[rv_1 + 2(r+1)] = r+2, \\ v_2^r\,[rv_2 + 2(r+1)] = v_1^r\,[(r+2)v_1 + 2(r+1)]/(v_1+1)^{r+1}, \\ v_3^r\,[rv_3 + 2(r+1)] = v_2^r\,[(r+2)v_2 + 2(r+1)]/(v_2+1)^{r+1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v_{n-1}^r[rv_{n-1} + 2(r+1)] = v_{n-2}^r[(r+2)v_{n-2} + 2(r+1)]/(v_{n-2}+1)^{r+1}, \\ v_1 > 0,\ v_2 > 0,\ \dots,\ v_{n-1} > 0 \end{array}\right. \tag{8}$$

имеет одно и только одно решение, и это решение удовлетворяет условию $v_1 < 1,\ v_2 < 1,\ \dots,\ v_{n-1} < 1$.

Доказательство. *Пусть* $F_1(v_1) = v_1^r\,[rv_1 + 2(r+1)] - (r+2)$. Так как для $v_1 \geqslant 0$ функция $F_1(v_1)$ строго возрастающая, $F_1(0) < 0$, $F_1(1) > 0$, то уравнение $F_1(v_1) = 0$ имеет единственный положительный корень v_1^*, причем $v_1^* < 1$. Пусть теперь k-е уравнение имеет единственный положительный корень v_k^* (предполагаем, что положительные корни системы, состоящей из первых $k-1$ уравнений, уже найдены) и при этом $v_k^* < 1$. Покажем, что тогда таким же свойством обладает $(k+1)$-е уравнение, в котором взято $v_k = v_k^*$.

Функция $F_{k+1}(v_{k+1}) = v_{k+1}^r[rv_{k+1} + 2(r+1)] - v_k^{*r}\,[(r+2)v_k^* + 2(r+1)]/(v_k^*+1)^{r+1}$ возрастает для $v_{k+1} \geqslant 0$, при этом $F_{k+1}(0) < 0$,

$$F_{k+1}(1) = 3r + 2 - \frac{v_k^{*r}\,[(r+2)v_k^* + 2(r+1)]}{(v_k^*+1)^{r+1}} =$$

$$= \frac{2rv_k^{*r+1} + 3r(r+1)v_k^{*r} + \ldots}{(v_k^* + 1)^{r+1}} > 0,$$

откуда следует, что функция $F_{k+1}(v_{k+1})$ имеет единственный положительный корень v_{k+1}^*, причем $v_{k+1}^* < 1$. Итак, лемма доказана индукцией.

Пусть

$$v_1^*, \; v_2^*, \; \ldots, \; v_{n-1}^*$$

обозначает решение системы (8).

Замечание 1. Система (8) проста для приближенного решения, требующего фактически последовательного решения $n-1$ однотипных уравнений, каждое из которых содержит одно неизвестное.

Замечание 2. При $r = 2$ точное решение системы (8) может быть записано в виде

$$v_1^* = \sqrt{3} - 1, \quad v_{k+1}^* = \frac{\sqrt{3(2v_k^*+3)(2v_k^*+1)} - (2v_k^*+3)}{2(v_k^*+1)}$$
$$(k = 1, 2, \ldots, n-2),$$

что можно проверить непосредственной подстановкой.

Ниже используем следующее обозначение:

$$\gamma_j = \frac{1}{v_j^* + 1} \quad (j = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{9}$$

Лемма 2. *Пусть*

$$U_n = \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^{r+1} (x_{i+1} + x_i), \tag{10}$$

где $x_0 = 0$, $x_n \leqslant 1$ *и фиксировано.*

Система

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_n}{\partial x_j} = 0 & (j = 1, 2, \ldots, n-1) \\ 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n \end{cases} \tag{11}$$

имеет единственное решение

$$x_k = x_n \prod_{j=k}^{n-1} \gamma_j \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \tag{12}$$

Доказательство. Выписав подробно уравнения (11), разделив k-е уравнение на x_k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) и сделав в полученных уравнениях замену

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{x_k} = v_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{13}$$

убеждаемся, что с учетом (13) системы (11) и (8) совпадают. Поэтому по лемме 1 система (11) имеет единственное решение, которое можно найти по (13), взяв в (13) $v_k = v_k^*$. Выразив из (13) значения x_k ($k = 1, 2, \ldots, n-1$), получим решение системы (11) в виде

$$x_1 = x_2\gamma_1, \; x_2 = x_3\gamma_2, \; \ldots, \; x_{n-1} = x_n\gamma_{n-1}. \tag{14}$$

Перемножив в (14) последние $n-k$ равенств ($k = 1, 2, \ldots, n-1$), получим равенства (12). Лемма доказана.

В дальнейшем через U_n^* будем обозначать наименьшее значение, которое может принять величина U_n при фиксированном значении $x_n \leqslant 1$ и значениях $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, удовлетворяющих условию

$$0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n. \tag{15}$$

Лемма 3. *Справедливо неравенство*

$$U_n^* \leqslant x_n^{r+2}. \tag{16}$$

Доказательство. Выбрав достаточно малое произвольное $\varepsilon > 0$ и взяв в (10) значения $x_k = k\varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$, видим, что при таком выборе значений $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ величина

$$U_n = \varepsilon^{r+2}(n-1)^2 + [x_n - (n-1)\varepsilon]^{r+1}[x_n + (n-1)\varepsilon] \leqslant x_n^{r+2} + \varepsilon A,$$

где A — некоторое число, не зависящее от ε. Отсюда, в силу произвольности ε, следует (16). Лемма доказана.

Лемма 4. *Значения $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, удовлетворяющие при фиксированном значении $x_n \leqslant 1$ условию* (15) *и доставляющие величине U_n наименьшее значение, совпадают со значениями* (12).

Доказательство проведем индукцией.

1. Пусть $n = 2$. Имеем

$$U_2 = x_1^{r+2} + (x_2 - x_1)^{r+1}(x_2 + x_1),$$

где $x_2 \leqslant 1$ и фиксировано. Так как значение $x_1 = x_2\gamma_1$ есть единственная положительная точка минимума функции $U_2 = U_2(x_1)$, то из

$$U_2|_{x_1=0} = U_2|_{x_1=x_2} = x_2^{r+2} > U_2|_{x_1=x_2\gamma_1}$$

следует утверждение леммы для данного случая.

2. Пусть лемма верна для $n = k$. По лемме 3

$$U_k^* = x_k^{r+2}\mu, \quad 0 < \mu \leqslant 1. \tag{17}$$

При этом значения $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ (в силу предположения справедливости леммы для $n = k$), для которых $U_k = U_k^*$, являются решением системы

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_j} = 0 \ (j = 1, 2, \ldots, k-1), \ 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k, \tag{18}$$

или, что то же, решением системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U_{k+1}}{\partial x_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k-1), \\ 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k, \end{cases} \tag{18^a}$$

где x_k фиксировано и $0 < x_k \leqslant 1$.

Покажем, что тогда утверждение леммы верно и для $n = k+1$. Пусть $0 < x_{k+1} \leqslant 1$ и фиксировано. Рассмотрим вопрос нахождения такого положительного значения $x_k < x_{k+1}$, при котором величина

$$V(x_k) = U_k^* + (x_{k+1} - x_k)^{r+1}(x_{k+1} + x_k)$$

принимает наименьшее значение, которое, очевидно, равно U_{k+1}^*. По (17)

$$V(x_k) = x_k^{r+2}\mu + (x_{k+1} - x_k)^{r+1}(x_{k+1} + x_k). \tag{19}$$

Легко убедиться (по аналогии с доказательством леммы 2 и с учетом неравенства $0<\mu\leqslant 1$), что уравнение $V'(x_k)=0$ имеет единственный корень на отрезке $0<x_k<x_{k+1}$, который может быть записан в виде $x_k^*=x_{k+1}/(1+v)$, где $v>0$ является единственным положительным корнем уравнения

$$v^r[rv+2(r+1)]=\mu(r+2). \tag{20}$$

Предположим, что $V(x_k^*)\geqslant \mu x_{k+1}^{r+2}$. В силу (19) последнее неравенство равносильно неравенству

$$v^{r+1}(v+2)\geqslant[(v+1)^{r+2}-1]\mu.$$

Разделив это неравенство на (20), получим неравенство

$$\frac{v(v+2)}{rv+2(r+1)}\geqslant\frac{(v+1)^{r+2}-1}{r+2},$$

которое невозможно при $r\geqslant 1$ и $v>0$. Противоречие показывает, что $V(x_k^*)<\mu x_{k+1}^{r+2}$. С другой стороны, $V(0)=x_{k+1}^{r+2}\geqslant V(x_{k+1})=\mu x_{k+1}^{r+2}$. Отсюда следует, что значение x_k^* доставляет величине $V(x_k)$ наименьшее значение.

Учитывая это и (18а), получаем, что значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$, удовлетворяющие условию $0<x_1<x_2<\ldots<x_k<x_{k+1}$ (где $x_{k+1}\leqslant 1$ и фиксировано) и доставляющие величине U_{k+1} наименьшее значение, являются единственным решением системы

$$\begin{cases}\dfrac{\partial U_{k+1}}{\partial x_j}=0 \ \ (j=1,2,\ldots,k-1), \ \dfrac{dV(x_k)}{dx_k}=0,\\ 0<x_1<x_2<\ldots<x_k<x_{k+1}.\end{cases} \tag{21}$$

Так как при выполнении (18) уравнение $V'(x_k)=0$ совпадает с уравнением $\dfrac{\partial}{\partial x_k}U_{k+1}=0$, то этим система (21) совпадает с системой (11) при $n=k+1$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Имеет место равенство*

$$U_n^*=x_n^{r+2}\mu_n, \tag{22}$$

где

$$\mu_n=\sum_{i=0}^{n-2}(1-\gamma_i)^{r+1}(1+\gamma_i)\Big(\prod_{j=i+1}^{n-1}\gamma_j\Big)^{r+2}+(1-\gamma_{n-1})^{r+1}(1+\gamma_{n-1}),$$

$\gamma_0=0$, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ *определены в* (9).

Доказательство получается сразу, если, учитывая лемму 4, подставить значения (12) в (10).

Теперь вернемся к величине (7). Учитывая лемму 5, имеем по (7), (10) и (22) неравенство

$$c_n\geqslant\frac{\mu_n}{r!\,2^{2r+1}}x_n^{r+2}+\frac{(1-x_n)^{r+1}(1+x_n+r)}{(r+2)!}, \tag{23}$$

где знак равенства достигается при узлах (12). Таким образом, для нахождения узлов, доставляющих величине (7) наименьшее значение, осталось найти значение x_n $(0<x_n\leqslant 1)$, для которого наименьшее значение принимает правая часть (23). Это значение находится легко и в результате получаем

$$x_n = \frac{1}{1+v_n^*}, \tag{24}$$

где v_n^* — единственный положительный корень уравнения

$$\frac{v^r}{(r+2)(r+1)}\,[v(2r+r^2)+3r+r^2+2] = \frac{\mu_n(r+2)}{2^{2r+1}}.$$

Итак, доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Единственная наилучшая на множестве $W_0^{(r)}L_\infty$ формула (2) при $p(x) \equiv x$ имеет узлы (24), (12) и веса (4). Оценка ошибки наилучшей формулы равна значению (5), где c_n равно правой части (23), в которой x_n имеет значение (24).*

Использование теоремы 1 и теоремы из [4] позволяет непосредственно придти к следующему утверждению:

Теорема 2. *Единственная наилучшая на множестве $W^{(r)}L_\infty$ формула (1) при $p(x) \equiv x$ имеет узлы $u_k = x_k$, где значения x_k вычислены по (24) и (12), веса $B_{kj} = A_{kj}$ ($k = 1, 2, \ldots, n$; $j = 0, 1, \ldots, r-1$), где значения A_{kj} вычислены по (4), и веса*

$$B_{0j} = \frac{1}{j!}R_n(x^j) \qquad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1),$$

где $R_n(x^j)$ означает ошибку наилучшей на множестве $W_0^{(r)}L_\infty$ формулы (2) (с $p(x) \equiv x$) для функции $f(x) = x^j$. Для этой формулы величина E_n совпадает со значением R_n.

Задачи построения наилучших квадратурных формул с весовой функцией рассматривались ранее, например, в [4–10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 23, 179 (1974).
3. Бернштейн С. Н., Собрание сочинений, т. I, 1952.
4. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 21, 449 (1972).
5. Левин М., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, сер. А, № 222, 15 (1965).
6. Аксень М. Б., Тр. I Республ. конф. математиков Белоруссии, Минск, 1965, с. 5—17.
7. Лебедь Г. К., Изв. АН СССР, Сер. матем., 34, 639 (1970).
8. Аксень М. Б., Левин М. И., Изв. АН БССР, Физ. Матем., № 1, 75 (1972).
9. Schoenberg I. J., Advances Math., 4, 277 (1970).
10. Coman G., Studii si cer. Matematica, 4, 495 (1973).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 4/III 1974

M. LEVIN, V. ARRO

PARIM KVADRATUURVALEM KAALUFUNKTSIOONIGA x

On leitud parimad kvadratuurvalemid (1) ja (2) vastavalt funktsioonide hulkadele

$$W^{(r)}L_\infty = \{f(x) : f^{(r-1)} \text{ absoluutselt pidev, } \underset{0\leqslant x\leqslant 1}{\mathrm{supvrai}}\, |f^{(r)}| \leqslant M\},$$

$$W_0^{(r)}L_\infty = \{f(x) : f \in W^{(r)}L_\infty,\ f^{(i)}(0) = 0 \quad (i=0,\ 1,\ \ldots,\ r-1)\},$$

kus $u_0 = 0$ ja $p(x) \equiv x$, s. t. arvud x_k, A_{kj}, B_{kj}, u_k on määratud nii, et

$$\sup_{f\in W^{(r)}L_\infty} |E_n(f)| \quad \text{ja} \quad \sup_{f\in W_0^{(r)}L_\infty} |R_n(f)|$$

omandaksid minimaalsed väärtused.

M. LEVIN, V. ARRO

THE BEST QUADRATURE FORMULAE WITH WEIGHT FUNCTION x

The best quadrature formulae (1) and (2) with $p(x) \equiv x$, $u_0 = 0$ for sets of functions

$$W^{(r)}L_\infty = \{f(x) : f^{(r-1)} \text{ absolute continuous, } \operatorname*{supvrai}_{0 \leqslant x \leqslant 1} |f^{(r)}| \leqslant M\},$$

$$W_0^{(r)} L_\infty = \{f(x) : f \in W^{(r)}L_\infty,\ f^{(i)}(0) = 0 \quad (i = 0, 1, \ldots, r-1)\}$$

have been found.

Values x_k, A_{kj}, B_{kj}, u_k have been determined to acquire minimum for

$$\sup_{f \in W^{(r)} L_\infty} |E_n(f)| \quad \text{and} \quad \sup_{f \in W_0^{(r)} L_\infty} |R_n(f)|.$$