EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.4.06

УДК 519.271/272

Елена РООС

ТЕОРЕМА О ПРЕДЕЛЬНОМ ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИОННОГО ТИПА

Рассмотрим уравнение вида

$$d\xi(t)=a(t,\xi(t))\,dt+\sigma(t,\xi(t))\,dw(t), \tag{1}$$

где $a(t,x)$, $\sigma(t,x)$ — некоторые случайные функции, измеримые относительно σ-алгебры F_t, $F_{t1}\subset F_{t2}$ ($F_t\subset F$ — семейство σ-алгебр, заданных на вероятностном пространстве (Q, F, P)).

Пусть существует решение уравнения (1) $\xi(t)$ (см. [1]). Тогда имеет место следующая

Теорема. *Если существуют неслучайные функции $a(x)$, $\sigma(x)$, непрерывные $\sigma(x)>0$, и такие, что*

1) $\left|\dfrac{a(x)}{\sigma(x)}\right|\leqslant c;$

2) $\dfrac{1}{t}M\left(\int\limits_0^t\left|\dfrac{a(s,x)-a(x)}{\sigma(x)}\right|ds\right)^2\to 0$

равномерно по x при $t\to\infty$,

$$M\left|\frac{\sigma(t,x)}{\sigma(x)}-1\right|^2\to 0$$

равномерно по x при $t\to\infty$ так, что

$$\frac{1}{t}M\left(\int\limits_0^t\left|\frac{\sigma^2(s,x)}{\sigma^2(x)}-1\right|ds\right)^2\to 0$$

равномерно по x при $t\to\infty$;

3) $\lim\limits_{|x|\to\infty}\dfrac{f(\gamma|x|)}{\int\limits_0^{\gamma|x|}[f'(u)\sigma^2(u)]^{-1}\,du}=\begin{cases}\sigma_1, & \gamma>0,\\ \sigma_2, & \gamma<0,\end{cases}$

где $\sigma_i>0$, $i=1, 2$; $f(x)=\int\limits_0^x\exp\left\{-2\int\limits_0^u\dfrac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv\right\}du$, то случайный процесс $T^{-\frac{1}{2}}f(\xi(tT))$, $0<t\leqslant 1$, при $T\to\infty$ слабо сходится к решению уравнения Ито

$$\eta(t)=\int_0^t \bar{\sigma}(\eta(s))\,dw(s), \tag{2}$$

где

$$\bar{\sigma}(x)=\begin{cases}\sqrt{\sigma_1}, & x>0,\\ \sqrt{\sigma_2}, & x<0.\end{cases}$$

Доказательство. Применим формулу Ито (в интегральной форме) к процессу $f(\xi(t))$, $t>0$:

$$f(\xi(t))=f(\xi(0))+\int_0^t [f'(\xi(s))a(s,\xi(s))+\frac{1}{2}f''(\xi(s))\sigma^2(s,\xi(s))]ds+$$

$$+\int_0^t f'(\xi(s))\sigma(s,\xi(s))dw(s)=f(\xi(0))+\int_0^t \{f'(\xi(s))[a(s,\xi(s))+$$

$$+a(\xi(s))-a(\xi(s))]+\frac{1}{2}f''(\xi(s))[\sigma^2(s,\xi(s))+\sigma^2(\xi(s))-$$

$$-\sigma^2(\xi(s))]\}ds+\int_0^t f'(\xi(s))[\sigma(s,\xi(s))+\sigma(\xi(s))-$$

$$-\sigma(\xi(s))]dw(s)=f(\xi(0))+\int_0^t [f'(\xi(s))a(\xi(s))+$$

$$+\frac{1}{2}f''(\xi(s))\sigma^2(\xi(s))]ds+\int_0^t f'(\xi(s))[a(s,\xi(s))- \tag{3}$$

$$-a(\xi(s))]ds+\frac{1}{2}\int_0^t f''(\xi(s))[\sigma^2(s,\xi(s))-\sigma^2(\xi(s))]ds+$$

$$+\int_0^t f'(\xi(s))\sigma(\xi(s))dw(s)+\int_0^t f'(\xi(s))[\sigma(s,\xi(s))-\sigma(\xi(s))]dw(s)=$$

$$=f(\xi(0))+I_1+I_2+I_3+I_4+I_5,$$

$a(x)$, $\sigma(x)$ — непрерывны, $\sigma(x)>0$.
Кроме того,

$$f'(x)a(x)+\frac{1}{2}f''(x)\sigma^2(x)=0, \tag{4}$$

так как

$$f(x)=\int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv\right\}du$$

по условию теоремы.

Оценим следующее выражение:

$$\frac{1}{t}M(I_2)^2=\frac{1}{t}M\Big(\int_0^t f'(x)[a(s,x)-a(x)]ds\Big)^2=$$

$$=\frac{1}{t}M\Big(\int_0^t f'(x)\sigma(x)\Big[\frac{a(s,x)-a(x)}{\sigma(x)}\Big]ds\Big)^2\leqslant$$

$$\leqslant c_1^2\frac{1}{t}M\Big(\int_0^t\Big|\frac{a(s,x)-a(x)}{\sigma(x)}\Big|ds\Big)^2\to 0$$

равномерно по x при $t\to\infty$ в силу условия 2 теоремы (в силу условия 3 теоремы $f'(x)\sigma(x)$ — ограниченная функция; следовательно, имеет место $\|f'(x)\sigma(x)|\leqslant c_1$).

Оценки $\frac{1}{t}M(I_3)^2$ и $\frac{1}{t}M(I_5)^2$ аналогичны:

$$\frac{1}{t}M(I_3)^2=\frac{1}{4t}M\left(\int_0^t f''(x)\left[\sigma^2(s,x)-\sigma^2(x)\right]ds\right)^2=$$

$$=\frac{1}{4t}M\left(\int_0^t f''(x)\sigma^2(x)\left[\frac{\sigma^2(s,x)}{\sigma^2(x)}-1\right]ds\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4t}M\left(\int_0^t\left|\frac{a(x)}{\sigma(x)}\right|\cdot\left|\frac{\sigma^2(s,x)}{\sigma^2(x)}-1\right|ds\right)^2\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{4t}c^2M\left(\int_0^t\left|\frac{\sigma^2(s,x)}{\sigma^2(x)}-1\right|ds\right)^2\to 0$$

равномерно по x при $t\to\infty$ в силу условий 1 и 2 теоремы;

$$\frac{1}{t}M(I_5)^2=\frac{1}{t}M\left(\int_0^t f'(x)\left[\sigma(s,x)-\sigma(x)\right]dw(s)\right)^2=$$

$$=\frac{1}{t}\int_0^t Mf'^2(x)\left[\sigma(s,x)-\sigma(x)\right]^2ds=$$

$$=\frac{1}{t}M\left(\int_0^t\left[f'(x)\sigma(x)\right]^2\left(\frac{\sigma(s,x)}{\sigma(x)}-1\right)^2ds\leqslant\right.$$

$$\leqslant\frac{1}{t}c_1^2M\int_0^t\left|\frac{\sigma(s,x)}{\sigma(x)}-1\right|^2ds=$$

$$=\frac{1}{t}c_1^2\int_0^t M\left|\frac{\sigma(s,x)}{\sigma(x)}-1\right|^2ds\to 0,\ t\to\infty,$$

так как подынтегральное выражение стремится к 0 равномерно по x при $t\to\infty$ из условия 2 теоремы.

Пусть $0<t\leqslant 1$. Введем параметр T и рассмотрим процессы

$$w_T(t)=T^{-\frac{1}{2}}w(tT);\qquad \zeta_T(t)=T^{-\frac{1}{2}}f(\xi(tT)).$$

По формуле Ито, учитывая изложенное выше и тот факт, что величина $f(\xi(0))$, не влияющая на дальнейшие выкладки, может быть взята равной нулю, получаем

$$\zeta_T(t)=\int_0^t f'(\xi(sT))\sigma(\xi(sT))\,dw_T(s)+o(1).\tag{5}$$

Как уже упоминалось $|f'(x)\sigma(x)|\leqslant c_1$. Следовательно,

$$M[\zeta_T(t+\Delta)-\zeta_T(t)]^2\leqslant c\Delta+o(1);$$
$$M[\zeta_T(t)]^2\leqslant c+o(1).$$

Аналогичные соотношения выполняются и для процесса $w_T(t)$.

Следовательно (см. [1], гл. 1, § 6), для любой последовательности $T'_n \to \infty$ существует подпоследовательность $T_n \to \infty$, для которой можно построить процессы $\eta_{T_n}(t)$, $\overline{w}_{T_n}(t)$ на некотором пространстве $(\overline{Q}, \overline{F}, \overline{P})$. Причем конечномерные распределения $\eta_{T_n}(t)$ и $\overline{w}_{T_n}(t)$ совпадают с конечномерными распределениями процессов $\zeta_{T_n}(t)$, $\overline{w}_{T_n}(t)$ и

$$\eta_{T_n}(t) \xrightarrow{\overline{P}} \eta(t), \quad \overline{w}_{T_n}(t) \xrightarrow{\overline{P}} \overline{w}(t)$$

при $T_n \to \infty$.

Отсюда с учетом (5) следует

$$\eta_{T_n}(t) = \int_0^t g_{T_n}(\eta_{T_n}(s))\, d\overline{w}_{T_n}(s) + o(1),$$

где $g_{T_n}(x) = f'(\varphi(x\sqrt{T_n}))\sigma(\varphi(x\sqrt{T_n}))$, (*) $\varphi(x)$ — функция, обратная к $f(x)$.

Покажем

$$\lim_{T\to\infty} \int_0^t P\{|\xi(sT)| < c\}\, ds = 0. \tag{6}$$

Для этого введем непрерывную неотрицательную функцию $q(x)$ следующим образом

$$q(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } |x| \leqslant c; \\ 0, & \text{если } |x| > c+1, \end{cases}$$

а также функцию $\Phi(x)$, удовлетворяющую соотношению

$$\Phi(x)a(x) + \frac{1}{2}\Phi''(x)\sigma^2(x) = q(x).$$

Одно из решений такого уравнения имеет вид

$$\Phi(x) = 2\int_0^x \left[f'(u) \int_0^u \frac{1}{f'(v)\sigma^2(v)} q(v)\, dv \right] du.$$

К процессу $\Phi(\xi(tT))$ применима формула Ито

$$\begin{aligned}\Phi(\xi(tT)) = {} & T\int_0^t q(\xi(sT))\,ds + T\int_0^t \Phi'(\xi(sT))[a(sT,\xi(sT)) - \\ & - a(\xi(sT))]ds + \frac{1}{2}T\int_0^t \Phi''(\xi(sT))[\sigma^2(sT,\xi(sT)) - \\ & - \sigma^2(\xi(sT))]ds + \int_0^t \Phi'(\xi(sT))\sigma(\xi(sT))\,dw(sT) + \\ & + \int_0^t \Phi'(\xi(sT))[\sigma(sT,\xi(sT)) - \sigma(\xi(sT))]dw(sT) = \\ & = T\int_0^t q(\xi(sT))\,ds + J_1 + J_2 + J_3 + J_4.\end{aligned}$$

Если $\chi_{(-c,c)}(x) = \begin{cases} 1, & |x| < c \\ 0, & |x| \geqslant c \end{cases}$, то $\chi_{(-c,c)}(x) \leqslant q(x)$.

Отсюда следует

$$\int_0^t \chi_{(-c,c)}(\xi(sT))\,ds \leqslant \int_0^t q(\xi(sT))\,ds =$$

$$=\frac{1}{T}\{[\Phi(\xi(tT))]-[\int_0^t \Phi'(\xi(sT))\sigma(\xi(sT))dw(sT)+J_1+J_2+J_3]\}.$$

Взяв математическое ожидание от обеих частей этого неравенства, получим

$$\int_0^t P\{|\xi(sT)|<c\}ds \leqslant \frac{M\Phi(\xi(tT))}{T}+\frac{MJ_1}{T}+\frac{MJ_2}{T}+\frac{MJ_3}{T}+\frac{MJ_4}{T}. \qquad (7)$$

В силу условий теоремы и из вида функции $\Phi(x)$

$$\frac{MJ_k}{T}\to 0, \quad T\to\infty; \quad k=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Следовательно,

$$\int_0^t P\{|\xi(sT)|<c\}ds \leqslant \frac{M\Phi(\xi(tT))}{T}+o(1).$$

Так как $|\Phi(x)|\leqslant c'|f(x)|$, $M|T^{-\frac{1}{2}}f(\xi(tT))|\leqslant c''$, то можно сделать следующий вывод:

$$\int_0^t P\{|\xi(sT)|<c\}ds\to 0, \quad T\to\infty.$$

Покажем теперь, что

$$\int_0^t \bar{P}\{|\eta(s)|=0\}ds=0. \qquad (8)$$

Введем функцию $\Psi(x)$, аналогично тому, как это делалось ранее

$$\Psi'(x)a(x)+\frac{1}{2}\Psi''(x)\sigma^2(x)=\chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right),$$

т. е. вспомогательная функция $\Psi(x)$ имеет вид

$$\Psi(x)=2\int_0^x[\int_0^u[g_{T_n}(v)]^{-2}\chi_{(-\varepsilon,\varepsilon)}(v)dv]du,$$

и $g_{T_n}(x)$ определяется, как в (*).

Используя формулу Ито для процесса $\Psi(\eta_{T_n}(t))$, получаем

$$\int_0^t \bar{P}\{|\eta_{T_n}(s)|<\varepsilon\}ds=\frac{M\Psi(\eta_{T_n}(t))}{T}+\frac{ME_1}{T}+\frac{ME_2}{T}+\frac{ME_3}{T}+\frac{ME_4}{T},$$

где

$$E_1=T\int_0^t\Psi'(\xi(sT))[a(sT,\xi(sT))-a(\xi(sT))]ds,$$

$$E_2=\frac{1}{2}T\int_0^t\Psi''(\xi(sT))[\sigma^2(sT,\xi(sT))-\sigma^2(\xi(sT))]ds,$$

$$E_3=\int_0^t\Psi'(\xi(sT))\sigma(\xi(sT))dw(sT),$$

$$E_4=\int_0^t\Psi'(\xi(sT))[\sigma(sT,\xi(sT))-\sigma(\xi(sT))]dw(sT).$$

Аналогично тому, как это имело место для J_k, здесь

$$\frac{ME_k}{T}\to 0,\quad T\to\infty,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

Итак

$$\int_0^t \bar{P}\{|\eta_{T_n}(s)|<\varepsilon\}ds=\frac{M\Psi(\eta_{T_n}(t))}{T}+o(1).$$

В силу последнего условия теоремы

$$|\Psi(x)|=4|x|\int_0^{\varepsilon}\frac{dv}{g^2_{T_n}(v)}=4|x|\frac{1}{\sqrt{T_n}}\int_0^{\varphi(\varepsilon\sqrt{T_n})}\frac{dv}{f'(v)\sigma^2(v)}\leqslant\varepsilon C_2|x|;$$

значит,

$$\int_0^t \bar{P}\{|\eta_{T_n}(s)|<\varepsilon\}ds\leqslant\varepsilon C_2 M|\eta_{T_n}(t)|+o(1)\leqslant\varepsilon C_3+o(1),$$

или

$$\int_0^t \bar{P}\{|\eta(s)|<\varepsilon\}ds\leqslant\varepsilon C_3.$$

В силу произвольности ε из последнего соотношения следует справедливость (8).

Далее, докажем

$$\int_0^t g^2_{T_n}(\eta_{T_n}(s))ds-\int_0^t\bar{\sigma}^2(\eta(s))ds\xrightarrow{P}0,\quad T_n\to\infty;\tag{9}$$

$$\bar{\sigma}(x)=\begin{cases}\sqrt{\sigma_1}, & x>0;\\ \sqrt{\sigma_2}, & x<0,\end{cases}$$

где $g_{T_n}(x)$ обусловлена (*).

Воспользуемся вспомогательной функцией вида

$$F(x)=2\int_0^x\left[f'(u)\int_0^u\left(f'(v)-\bar{\sigma}^2(v)\frac{1}{f'(v)\sigma^2(v)}\right)dv\right]du.$$

Функции $F(x)$, $F'(x)$ непрерывны, а $F''(x)$ терпит скачок в точке 0; но путем сглаживания в точке 0 за счет $\bar{\sigma}(x)$ это препятствие можно устранить и, следовательно, для процесса $F(\xi(tT))$ применима формула Ито. Воспользовавшись ею, получим

$$\int_0^t\{[f'(\xi(sT))\sigma(\xi(sT))]^2-\bar{\sigma}^2(\xi(sT))\}ds=$$

$$=\frac{1}{T}\left[F(\xi(tT))-\int_0^t F'(\xi(sT))\sigma(\xi(sT))dw(sT)\right]+L_1+L_2+L_3,\tag{10}$$

где L_k ($k=1,\ 2,\ 3$) аналогичны выражениям J_k либо E_k, причем $\frac{1}{T}ML_k\to 0$, $T\to\infty$, $k=1,\ 2,\ 3$, в силу условий теоремы.

Из построения функции $F(x)$

$\frac{F(x)}{f^2(x)} \to 0$; $\frac{F'(x)\sigma(x)}{f(x)} \to 0$ при $|x| \to \infty$. И, по доказанному, имеет место (6). Отсюда следует

$$\frac{F(\xi(tT))}{T} = \frac{F(\xi(tT))}{f^2(\xi(tT))}\left[\frac{f(\xi(tT))}{\sqrt{T}}\right]^2 = \frac{F(\xi(tT))}{f^2(\xi(tT))}\zeta_T^2(t) \xrightarrow{P} 0, \quad T \to \infty.$$

Далее,

$$M\left[\frac{1}{T}\int_0^t F'(\xi(sT))\sigma(\xi(sT))\,dw(sT)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{T}\int_0^t M[F'(\xi(sT))\sigma(\xi(sT))]^2 ds =$$

$$= \int_0^t M\left[\frac{F'(\xi(sT))\sigma(\xi(sT))}{f(\xi(sT))}\right]^2 \zeta_T^2(s)\,ds \to 0, \quad T \to \infty.$$

Из последнего соотношения и из (10)

$$\int_0^t \{[f'(\xi(sT))\sigma(\xi(sT))]^2 - \overline{\sigma}^2(\xi(sT))\}\,ds \xrightarrow{P} 0, \quad T \to \infty.$$

Конечномерные распределения процессов $\zeta_{T_n}(t)$ и $\eta_{T_n}(t)$ совпадают. Следовательно,

$$\int_0^t g_{T_n}^2(\eta_{T_n}(s))\,ds - \int_0^t \overline{\sigma}^2(\eta_{T_n}(s))\,ds \xrightarrow{P} 0, \quad T_n \to \infty$$

(при условии $\int_0^t \overline{P}\{|\eta(s)|=0\}\,ds = 0$).

Исходя из этого, легко показать (см. [2] либо [3])

$$\eta(t) = \int_0^t \overline{\sigma}(\eta(s))\,dw(s).$$

Из единственности решения этого уравнения и произвольности последовательности T_n следует доказательство теоремы.

Замечание 1. При условиях сформулированной теоремы, если

$$\lim_{k\to\infty}\frac{f(kx)}{f(k)} = \begin{cases} x^\alpha, & x > 0; \\ -c|x|, & x < 0, \end{cases}$$

где $\alpha > 0$, $c > 0$ — некоторые постоянные, то распределение случайной величины $\xi(t)/B(t)$, где $B(t)$ — решение уравнения $\sqrt{t} = f(B(t))$, сходится при $t \to \infty$ к распределению с плотностью

$$\varrho(x) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}}\alpha x^{\alpha-1}e^{-x\frac{2\alpha}{2\sigma_1}} & (x>0); \\ \frac{2\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}c\alpha|x|^{\alpha-1}e^{-\frac{c^2|x|^{2\alpha}}{2\sigma_2}} & (x<0) \end{cases}$$

Доказательство может быть проведено аналогично доказательству теоремы 2 в [2].

Замечание 2. В работе [4] допущена неточность в формулировке теоремы 2, а именно: предельное распределение, указанное в формулировке, имеет место для случайного процесса $T^{-\frac{1}{2}}g(\xi(tT))$, где

$$g(x)=\int_0^x e^{-2\int_{-\infty}^{u}\frac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv}du.$$

Но рассматривался случайный процесс $t^{-\frac{1}{2}}f(\xi(t))$, где

$$f(x)=\int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv\right\}du,$$

предельное распределение которого имеет вид, указанный в [3]:

$$\varrho(x)=\begin{cases}\dfrac{2\sqrt{\sigma_2}}{\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_1}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_1}}, & x>0,\\ \dfrac{2\sqrt{\sigma_1}}{\sqrt{\sigma_1}+\sqrt{\sigma_2}}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_2}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma_2}}, & x<0.\end{cases}$$

Следовательно, величину $\bar{\sigma}(x)$, введенную в доказательстве теоремы 2 работы [4], надо понимать так:

$$\bar{\sigma}(x)=\begin{cases}\sqrt{\sigma_1}, & x>0,\\ \sqrt{\sigma_2}, & x<0,\end{cases}$$

причем

$$\sqrt{\sigma_1}=\exp\left\{-2\int_0^{-\infty}\frac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv\right\},\quad \sqrt{\sigma_2}=\exp\left\{-2\int_0^{\infty}\frac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv\right\}.$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$d\xi(t)=a(t,\xi(t))dt+\sigma(t,\xi(t))dw(t),$$

где $\xi(t)$ — случайный процесс, измеримый относительно σ-алгебры F_t. Здесь

$$a(t,\xi(t))=\frac{\sin(\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\xi(s))}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{1-\xi(t)}{(1+\xi^2(t))^3};\quad a(x)=\frac{1-x}{(1+x^2)^3};$$

$$\sigma(t,\xi(t))=\frac{\cos(\sup\limits_{0\leqslant s\leqslant t}\xi(s))}{\sqrt{1+t^2}}+\frac{1}{1+\xi^2(t)};\quad \sigma(x)=\frac{1}{1+x^2}.$$

Тогда случайный процесс $t^{-\frac{1}{6}}\xi(t)$ при $t\to\infty$ имеет предельное распределение с плотностью (см. [3])

$$\varrho(x) = \begin{cases} \dfrac{2e^{\pi}}{e^{\pi}+e^{-\pi}} x^2 \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^6}{18}}, & x>0; \\ \dfrac{2e^{-\pi}}{e^{\pi}+e^{-\pi}} x^2 \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^6}{18}}, & x<0. \end{cases}$$

В заключение автор приносит искреннюю благодарность Г. Л. Кулиничу за помощь при написании данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Скороход А. В., Исследования по теории случайных процессов, Киев, 1961.
2. Кулинич Г. Л., Предельные распределения решения стохастического диффузионного уравнения, Теория вероятн. и ее прим., вып. 13, № 3 (1968).
3. Кулинич Г. Л., Асимптотическое поведение неустойчивого решения стохастического однородного диффузионного уравнения, В сб.: Теория вероятн. и матем. статистика, вып. 5, Киев, 1971.
4. Роос Е., Предельное поведение распределения решения стохастического дифференциального уравнения с коэффициентами, зависящими от всего прошлого процесса, Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 21, 347 (1972).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 14/I 1974

Jelena ROOS

DIFUSIOONI TÜÜPI STOHHASTILISE DIFERENTSIAALVÕRRANDI LAHENDI PIIRJAOTUSE TEOREEM

Artiklis vaadeldakse stohhastilist diferentsiaalvõrrandit kujul

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + \sigma(t, \xi(t))dw(t)$$

On tuletatud selle võrrandi lahendi piirjaotus.

Yelena ROOS

THEOREM FOR THE LIMIT BEHAVIOUR OF THE SOLUTION OF THE DIFFUSION TYPE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION

In this article the limit distribution's behaviour of the stochastic differential equation

$$d\xi(t) = a(t, \xi(t))dt + \sigma(t, \xi(t))dw(t)$$

is investigated.