EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.4.05

УДК 517.948

А. РООЗЕ

СВОЙСТВА ОДНОГО КЛАССА АЛГОРИТМОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В [1] для решения нелинейного уравнения *

$$P(x)=0 \tag{1}$$

приведен класс алгоритмов

$$x_{n+1}=x_n-\left[(1-\alpha)\Gamma(x_n)+\alpha\Gamma\left(x_n-\frac{1}{2\alpha}\Gamma(x_n)P(x_n)\right)\right]P(x_n), \tag{2}$$

где $\Gamma(x_n)=[P'(x_n)]^{-1}$, α — скалярный параметр, $\alpha\neq 0$. Там же была выяснена зависимость скорости сходимости процессов (2) от изменения модуля α. Приведенная ниже теорема позволяет более подробно исследовать влияние параметра α на свойства алгоритмов (2).

Теорема. *Пусть*

1) *уравнение* (1) *имеет решение в сфере* $S(x_0,\varrho)$;

2) *при* $x\in S(x_0,r)$, *где* $r=[1+(\varrho\sqrt{C(|\alpha|)})^2]\varrho$, *справедливы оценки* $\|P'(x)\|\leqslant I$, $\|\Gamma(x)P(x)\|\leqslant\eta$;

3) *при* $x\in S(x_0,R)$, *где*

$$R=\begin{cases} r+\dfrac{\eta}{2|\alpha|}, & \text{если}\quad |\alpha|\leqslant\dfrac{h}{2}\dfrac{1}{1-\sqrt{1-2h}},\\[2ex] r+\dfrac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta, & \text{если}\quad |\alpha|>\dfrac{h}{2}\dfrac{1}{1-\sqrt{1-2h}},\end{cases}$$

$h=BK\eta\leqslant\frac{1}{2}$, *справедливы оценки* $\|P'''(x)\|\leqslant L$, $\|P''(x)\|\leqslant K$, $\|\Gamma(x)\|\leqslant B$;

4) $\varrho\sqrt{C(|\alpha|)}<1$, *где* $C(|\alpha|)=\left\{\left[\frac{1}{8|\alpha|}+\frac{1}{6}\right](2K^2B^5+LB^4)+\frac{1}{6}K^2B^5\right\}I^3$.

Тогда решение x^* *уравнения* (1) *в сфере* $S(x_0,\varrho)$ *единственно и последовательность* (2) *сходится к* x^* *со скоростью*

$$\|x^*-x_n\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{C(|\alpha|)}}(\varrho\sqrt{C(|\alpha|)})^{3^n}\quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{3}$$

* Рассматривается в банаховых пространствах. Производные в смысле Фреше, третья производная непрерывна.

Доказательство. В [1] показано, что

$$\|x^*-x_{n+1}\|=\Big\|-\frac{1}{2}\int_0^1(1-\lambda)^2\Phi'''[(1-\lambda)P(x_n)]P^3(x_n)\,d\lambda+$$

$$+\alpha\left\{\int_0^1(1-\lambda)D^2\left[\Gamma\left(x_n-\frac{\lambda}{2\alpha}\Gamma(x_n)P(x_n)\right);\left(-\frac{\Gamma(x_n)P(x_n)}{2\alpha}\right)^2\right]d\lambda\right\}P(x_n)\Big\|, \tag{4}$$

где

$$\Phi'''[(1-\lambda)P(x_n)]P^3(x_n)=-\Gamma(\bar{x}_n)P'''(\bar{x}_n)[\Gamma(\bar{x}_n)P(x_n)]^3+$$
$$+3\Gamma(\bar{x}_n)P''(\bar{x}_n)\Gamma(\bar{x}_n)P''(\bar{x}_n)[\Gamma(\bar{x}_n)P(x_n)]^3,\quad P(\bar{x}_n)=(1-\lambda)P(x_n),$$

$$\int_0^1(1-\lambda)D^2\left[\Gamma(z_n);\left(-\frac{\Gamma(x_n)P(x_n)}{2\alpha}\right)^2\right]d\lambda=$$

$$=\frac{1}{4\alpha^2}\int_0^1(1-\lambda)\{2\Gamma(z_n)P''(z_n)\Gamma(x_n)P(x_n)\Gamma(z_n)P''(z_n)\Gamma(x_n)P(x_n)\Gamma(z_n)-$$
$$-\Gamma(z_n)P'''(z_n)[\Gamma(x_n)P(x_n)]^2\Gamma(z_n)\}\,d\lambda,$$
$$z_n=x_n-\frac{\lambda}{2\alpha}\Gamma(x_n)P(x_n).$$

При условии, что $x_n\in S(x_0,r)$ и $z_n,\bar{x}_n\in S(x_0,R)$, от (4) приходим к оценкам

$$\|x^*-x_{n+1}\|\leqslant C(|\alpha|)\|x^*-x_n\|^3\qquad(n=0,1,2,\ldots). \tag{5}$$

По индукции из оценок (5) вытекают оценки (3).

Убедимся, что $x_n\in S(x_0,r)$. Действительно,

$$\|x_n-x_0\|\leqslant\|x_n-x^*\|+\|x^*-x_0\|\leqslant\frac{1}{\sqrt{C(|\alpha|)}}(\varrho\sqrt{C(|\alpha|)})^{3^n}+\varrho<$$
$$<[1+(\varrho\sqrt{C(|\alpha|)})^2]\varrho=r.$$

Далее имеют место оценки $\|z_n-x_0\|\leqslant\|x_n-x_0\|+\frac{\eta}{2|\alpha|}<r+\frac{\eta}{2|\alpha|}$. Аналогично [2] можно установить, что

$$\|\bar{x}_n-x_n\|\leqslant\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta.$$

Значит, $\|\bar{x}_n-x_0\|<r+\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta$. Легко проверить, что

$$\frac{\eta}{2|\alpha|}\geqslant\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta\quad\text{при}\quad|\alpha|\leqslant\frac{h}{2}\,\frac{1}{1-\sqrt{1-2h}}\quad\text{и}$$

$$\frac{\eta}{2|\alpha|}\leqslant\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta\quad\text{при}\quad|\alpha|\geqslant\frac{h}{2}\,\frac{1}{1-\sqrt{1-2h}}.$$

Следовательно, $R=\max\left\{r+\frac{\eta}{2|\alpha|},\ r+\frac{1-\sqrt{1-2h}}{h}\eta\right\}$ и поэтому $z_n,\ \bar{x}_n\in S(x_0,R)$.

Из предыдущего вытекает, что $\lim\limits_n x_n=x^*$. Если бы уравнение (1) имело в сфере $S(x_0,\varrho)$ решение $x^{**}\neq x^*$, то посредством аналогичных рассуждений можно было бы показать $\lim\limits_n x_n=x^{**}$. На основании единственности предельного элемента сходящейся последовательности $\{x_n\}$ решение x^* в сфере $S(x_0,\varrho)$ единственно. Теорема доказана.

На основании приведенной выше теоремы можно убедиться, что при возрастании $|\alpha|$ свойства алгоритмов (2) улучшаются, т. е. повышается скорость сходимости и уменьшаются радиусы сфер, в которых должны выполняться условия теоремы.

З а м е ч а н и е 1. Выпишем задачу Коши

$$\frac{dx}{dt}=-\Gamma(x)P(x_0),\qquad x(0)=x_0. \tag{6}$$

Решение $x(t)$ задачи (6) (если оно существует) удовлетворяет равенству $x(1)=x^*$ [3]. Поэтому с помощью теоремы, устанавливающей условия единственности решения $x(t)$ в некоторой области, можно оценить радиус сферы, в которой находится x^* (см., напр., [4], теорема 5.6.1). Можно проверить, что при сделанных предположениях приведенной выше теоремы $h^*\in S(x_0,\varrho)$, где $\varrho=B\|P(x_0)\|$. К тому же единственность $x(t)$ еще раз доказывает единственность x^*.

З а м е ч а н и е 2. Рассмотрим модифицированные варианты алгоритмов (2) вида

$$x_{n+1}=x_n-\left[(1-\alpha)\Gamma(x_0)+\alpha\Gamma\left(x_0-\frac{1}{2\alpha}\Gamma(x_0)P(x_0)\right)\right]P(x_n),\quad \alpha\neq 0. \tag{7}$$

Здесь, как и при модифицированном алгоритме Ньютона—Канторовича, операторы $\Gamma(x)$ требуют вычисления только один раз в начальной точке.

Перепишем (7) в виде

$$x_{n+1}=x_n-\Gamma(x_0)P(x_n)+\alpha\left[\Gamma(x_0)-\Gamma\left(x_0-\frac{1}{2\alpha}\Gamma(x_0)P(x_0)\right)\right]P(x_n). \tag{8}$$

Нетрудно заметить, что выражение (8) — это один класс модифицированных алгоритмов Ньютона—Канторовича с возмущениями. Следовательно, применима соответствующая теорема [5], которая дает общие условия сходимости такого рода алгоритмов. Однако свойства этих алгоритмов будут хуже свойств самого модифицированного алгоритма Ньютона—Канторовича. Отсюда следует, что хотя установление условий сходимости алгоритмов (7) и возможно, применение их для решения уравнений нецелесообразно.

З а м е ч а н и е 3. Алгоритмы (2) получены по методике, опубликованной почти одновременно В. Кизнером [6], Д. Ф. Давиденко [7], Н. Б. Хемесатом [8] и С. С. Савенко [9]. Т. И. Коган [10], Д. Ф. Давиденко [11] (см. подробнее), Д. К. Лика [12] и Х. Клайнмихел [3] исследовали условия сходимости отдельных алгоритмов из семейства (2) к решению x^* уравнения (1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Роозе А., Изв. АН ЭССР. Физ. Матем., 22, 431 (1973).
2. Нечепуренко М. И., УМН, 9, № 2 (1954).
3. Kleinmichel H., Math. Nachr., 37, H. 5/6 (1968).
4. Хилл Э., Функциональный анализ и полугруппы, М., 1951.
5. Красносельский М. А. и др., Приближенное решение операторных уравнений, М., 1969, с. 145.
6. Kizner W., SIAM J. Appl. Math., 12, No. 2 (1964).
7. Давиденко Д. Ф., ДАН СССР, 162, № 3 (1965).
8. Hemesath N. B., IEEE Trans. on Aut. Contr., AC-10, No. 4 (1965).
9. Савенко С. С., Решение алгебраических и трансцендентных уравнений методом решения дифференциальных уравнений, В сб.: Применение матем. методов и выч. техники в горном деле, М., 1965.
10. Коган Т. И., Сиб. матем. ж., 8, № 4 (1967).
11. Давиденко Д. Ф., Об одном классе итерационных методов третьего порядка для обращения линейных операций, Ин-т атомной энергии им. И. В. Курчатова, препринт ИАЭ-2220, М., 1972.
12. Лика Д. К., Изв. АН МолдССР, Физ. Матем., № 1 (1972).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
21/I 1974

A. ROOSE

MITTELINEAARSETE VÕRRANDITE ÜHE LAHENDUSALGORITMIDE KLASSI OMADUSED

Töös uuritakse parameetri α mõju võrrandi (1) lahendusalgoritmide klassile (2). Selgub, et α absoluutväärtuse kasvamisel suurenevad algoritmide (2) garanteeritud koonduvuskiirused ja vähenevad piirkonnad, kus nõutakse koonduvuseks vajalike tingimuste täitmist. Selgitatakse ka nn. modifitseeritud algoritmide (7) omadusi.

A. ROOSE

THE PROPERTIES OF A CLASS OF ALGORITHMS FOR SOLVING NON-LINEAR EQUATIONS

The dependence of the properties of algorithms (2) on the scalar parameter α is investigated. It appears that the guaranteed speed of convergence to the solution of equation (1) grows and the spheres where necessary convergence conditions must be fulfilled decrease if the absolute value of α grows. The so-called modified algorithms (7) of algorithms (2) are also briefly examined.