EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.4.02

Я. ХЕННО

УДК 519.48

ВЛОЖЕНИЕ Ω-СИСТЕМ В Ω-СИСТЕМЫ С МИНИМАЛЬНЫМ ЧИСЛОМ ОБРАЗУЮЩИХ

В теории полугрупп известна теорема Эванса [1]: *всякую конечную или счетную полугруппу можно вложить в полугруппу с двумя образующими.* Оказывается, что всякую конечную или счетную m-полугруппу можно вложить в m-полугруппу только с одним образующим, причем соответствующую теорему (как и теорему Эванса) можно получить как следствие из доказанной ниже гораздо более общей теоремы.

Пусть I — произвольное непустое множество целых неотрицательных чисел, $I \neq \{0\}$. Обозначим $A = A_I$, если на множестве A дано разбиение на непустые непересекающиеся подмножества A_n, $n \in I$. Пусть A_n, $n \in I$, — Ω-алгебры (т. е. универсальные алгебры с областью операции Ω). Обозначим через Ω_k совокупность всех k-арных операций из Ω, через $\overset{\omega}{\Sigma}\, a_i$ (или через $a_1 \ldots a_k\omega$) — результат применения операций $\omega \in \Omega_k$, $k > 0$, к $a_1, \ldots, a_k \in A_n$, через 0^n_ν — элемент, отмеченный в A_n операцией $\nu \in \Omega_0$.

Пусть всяким $a_1, \ldots, a_m \in A_n$, $b \in A_m$, $n \in I$, $m \in \bar{I} = I \setminus \{0\}$, сопоставлен элемент $a_1 \ldots a_m b \in A_n$. Непересекающееся объединение A_I Ω-алгебр A_n называется Ω-системой (или просто системой) [2], если при любых $x_1, \ldots, x_m, 0_\nu^n \in A_n$, $y_1, \ldots, y_l$, $u_1, \ldots, u_k$, $0_\nu^m \in A_m$, $z \in A_l$, $n \in I$, $m, l \in \bar{I}$, $\omega \in \Omega_k$, $k > 0$, $\nu \in \Omega_0$, выполняются тождества

$$x_1 \ldots x_m (y_1 \ldots y_l z) = (x_1 \ldots x_m y_1) \ldots (x_1 \ldots x_m y_l) z,$$
$$x_1 \ldots x_m \overset{\omega}{\Sigma}\, u_i = \overset{\omega}{\Sigma}\, x_1 \ldots x_m u_i,$$
$$x_1 \ldots x_m 0_\nu^m = 0_\nu^n .$$

Частными случаями Ω-систем являются полигоны ($\Omega = \varnothing$, $I = \{0, 1\}$), полугруппы ($\Omega = \varnothing$, $I = \{1\}$) (в [3] m-полугруппы назывались оперативами Менгера), кольца, полукольца, почтикольца ($I = \{1\}$, $\Omega = \{+, -\}$), m-арные Ω-кольцоиды [4] ($I = \{m\}$).

Понятия подсистемы, гомоморфизмы, конгруэнции и т. д. определяются для Ω-систем естественным образом (см. [2]). Заметим, что если τ — гомоморфизм Ω-системы A_I в Ω-систему B_J, то $I \subseteq J$ и $A_n^\tau \subseteq B_n$ при любом $n \in I$; соответственно, $\varrho \cap (A_n \times A_m) = \varnothing$ при $n \neq m$ для всякой конгруэнции ϱ Ω-системы A_I. Система W_I называется свободной (в классе всех Ω-систем) над множеством образующих X_I, если для всякой Ω-системы A_I любое отображение $\tau : X_I \to A_I$ ($X_n^\tau \subseteq A_n$, $n \in I$) однозначно продолжимо до гомоморфизма $W_I \to A_I$. Цель настоящей работы состоит в доказательстве следующей теоремы.

Теорема. *Пусть Ω-система K_I имеет такое множество X_I образующих, что $X_I \setminus X_0$ конечно или счетно. Тогда K_I можно вложить в Ω-систему L_I, множество образующих Y_I которой такое, что Y_1 содержит не более двух элементов, а всякое Y_m, $m > 1$, $m \in I$, — один элемент.*

Доказательство. Пусть Ω-система W_I свободна над множеством Z_I, где $Z_1 = \{z_1^1, z_2^1\}$ (если $1 \in I$; если $1 \notin I$, то $Z_1 = \varnothing$), $Z_m = \{z^m\}$, $m > 1$, $m \in I$ (Z_0 — произвольное множество).

Обозначим $u_1^1 = z_1^1$, $u_{t+1}^1 = u_t^1 z_2^1$, $v_t^1 = u_{t+2}^1 u_1^1 = u_{t+2}^1 z_1^1$, $u_1^m = z^m$, $u_{t+1}^m = u_t^m u_1^m \ldots u_1^m = u_t^m z^m \ldots z^m$, $v_t^m = u_{t+2}^m u_2^m u_1^m \ldots u_1^m = u_{t+2}^m u_2^m z^m \ldots z^m$, ($m > 1$, $m \in I$, $t = 1, 2, \ldots$), $V_0 = Z_0$, $V_n = \{v_1^n, v_2^n, \ldots\}$, $n > 0$, $n \in I$, и пусть A_I — порожденная множеством V_I подсистема Ω-системы W_I. Так как A_I над V_I свободна [2] и всякое V_n, $n > 0$, счетно, то K_I изоморфна факторсистеме A_I/ϱ, где ϱ — некоторая конгруэнция системы A_I. Поэтому достаточно показать, что если Θ — минимальная содержащая отношение ϱ конгруэнция системы W_I, то при всех $n \in I$ справедливо

$$\Theta \cap (A_n \times A_n) = \varrho \cap (A_n \times A_n), \tag{1}$$

т. е. ϱ продолжимо до конгруэнции системы W_I. Тогда искомым будет вложение $K \to W_I/\Theta = L$.

Доказательство равенства (1) состоит из ряда лемм и определений.

Пусть X_I — произвольное множество. Сопоставим всяким $n \in I$, $\nu \in \Omega_0$ взаимно однозначно символ 0_ν^n и определим индуктивно множества $W_n(X)$, $n \in I$, слов (над X_I) и вес $h(w)$ всякого слова w. Положим, что при любом $n \in I$ словами весом 1 из $W_n(X)$ будут все символы $x \in X_n$, 0_ν^n, и если слова $w_1, \ldots, w_m$, $v_1, \ldots, v_k \in W_n(X)$ уже определены, то выражения $w_1 \ldots w_m x$, $\overset{\omega}{\Sigma} v_i$ будут при любых $x \in X_m$, $m \in \bar{I}$, $\omega \in \Omega_k$, $k > 0$, словами из $W_n(X)$, причем $h(w_1 \ldots w_m x) = \max\limits_i h(w_i) + 1$, $h(\overset{\omega}{\Sigma} v_i) = \max\limits_i h(v_i) + 1$. Назовем слова вида $w_1 \ldots w_m x$ произведениями, вида $\overset{\omega}{\Sigma} v_i$ — суммами и обозначим $\varepsilon_i(w_1 \ldots w_m x) = w_i$, $\varepsilon_i(\overset{\omega}{\Sigma} v_i) = v_i$, $\varepsilon_0(w_1 \ldots w_m x) = x$, $\varepsilon_0(\overset{\omega}{\Sigma} v_i) = \omega$.

Далее определим индукцией по $h(v)$ произведение $w_1 \ldots w_m v$ слов $w_1, \ldots, w_m \in W_n(X)$, $v \in W_m(X)$ ($n \in I$, $m \in \bar{I}$). При $v \in X_m$ произведение равняется* слову $w_1 \ldots w_m v$, при $v = 0_\nu^m$ положим $w_1 \ldots w_m 0_\nu^m = 0_\nu^n$. Если $h(v) > 1$, то при $v = v_1 \ldots v_l x$ положим $w_1 \ldots w_m v = (w_1 \ldots w_m v_1) \ldots (w_1 \ldots w_m v_l) x$, а при $v = \overset{\omega}{\Sigma} v_i$ — $w_1 \ldots w_m v = \overset{\omega}{\Sigma} w_1 \ldots w_m v_i$. Определив на множествах $W_n(X)$ ($n \in I$) естественным образом операции из Ω, получим Ω-систему $W_I(X)$, свободную над множеством X [2]. Так как свободная над данным множеством Ω-система определяется с точностью до изоморфизма однозначно, то будем считать, что $W_I = W_I(Z)$, $A = W_I(V)$, т. е. всякое A_n, $n \in I$, состоит из слов 0_ν^n, v_t^n, $\overset{\omega}{\Sigma} a_i$, $a_1 \ldots a_m v_t^m$ ($a_i \in A_n$, $v_t^m \in V_m$, $m \in \bar{I}$).

Определим индуктивно множества $P_n = \bigcup P_n^i$, $i = 0, 1, 2$, $n \in I$, полиномов, а также ранг $g(p)$ и область определения $o(p)$ каждого полинома p. При любом $n \in I$ символ ξ^n есть полином ранга 1,

---

* Под равенством слов понимается графическое равенство.

$\xi^n \in P^0_n$, $o(\xi^n) = W_n$. Выражения вида $w_1 \ldots w_m \xi^m$ (здесь $w_i \in W_n$, $m \in I$) являются полиномами ранга 2, $w_1 \ldots w_m \xi^m \in P^0_n$, $o(w_1 \ldots w_m \xi^m) = W_m$. Если $p \in P_n$, $g(p) = g$, то выражения $q_1 = w_1 \ldots w_{i-1} p w_{i+1} \ldots w_m z$, $q_2 = w_1 \ldots w_{j-1} p w_{j+1} \ldots w_k \omega$ ($w_t \in W_n$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $m \in I$, $z \in Z_m$, $\omega \in \Omega_k$, $k > 0$, $1 \leqslant j \leqslant k$) являются полиномами ранга $g+1$, $q_1 \in P^1_n$, $q_2 \in P^2_n$, $o(q_1) = o(q_2) = o(p)$. Значение $p(w)$ полинома p в точке $w \in o(p)$ определяется обычным образом. Известно [2], что при любых $w, w' \in W_I$ имеем $w \Theta w'$ тогда и только тогда, когда либо $w = w'$, либо существует соединяющая слова w, w' последовательность полиномов, т. е. существуют полиномы p_i и слова a_i, a_i', $i = 1, \ldots, r$, такие, что

$$a_i \varrho a'_i, \quad a_i, \quad a'_i \in a(p_i) = o(p_i) \cap A_I, \qquad i = 1, \ldots, r, \tag{2}$$

$$w = p_1(a_1), \quad p_i(a'_i) = p_{i+1}(a_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, r-1, \quad p_r(a'_r) = w'. \tag{3}$$

Пусть $w \Theta w'$. Если $q_1, \ldots, q_r$ — некоторая соединяющая слова w, w' последовательность, для которой $\max g(q_i)$ является наименьшим (среди всех соединяющих слова w, w' последовательностей), то назовем последовательность $q_1, \ldots, q_r$ для слов w, w' минимальной и обозначим $\max g(q_i) = \varrho(w, w')$. При $w = w'$ положим $\varrho(w, w') = 0$.

Назовем последовательность полиномов $p_1, \ldots, p_r$ однородной, если $\{p_1, \ldots, p_r\} \subseteq P^t_n$, $t > 0$. Из определения полиномов ясно, что если $p \in P^1_n$ или $p \in P_n$, $a, a' \in a(p)$, $a \varrho a'$, то $\varepsilon_0(p(a)) = \varepsilon_0(p(a'))$, $\varepsilon_i(p(a)) \Theta \varepsilon_i(p(a'))$ при всех $i > 0$, причем в случае $p \in P^1_n$ слова $p(a)$, $p(a')$ являются произведениями, а в случае $p \in P^2_n$ — суммами. Поэтому в соединяющей последовательности полиномы $p \in P^1_n$ и $q \in P^2_n$ не могут стоять рядом и если $p_1, \ldots, p_r$ — соединяющая слова w, w' однородная последовательность полиномов, то $\varepsilon_0(w) = \varepsilon_0(w')$, $\varepsilon_i(w) \Theta \varepsilon_i(w')$, причем $\varrho(\varepsilon_i(w), \varepsilon_i(w')) < \max g(p_j)$ при всех $i > 0$.

Будем понимать запись $w = w_1 \ldots w_m v$, $w_1, \ldots, w_m \in W^0_n$ следующим образом: либо $w = w_1 \ldots w_m v$, $w_1, \ldots, w_m \in W_n$, $v \in W_m$, либо $n = m$, $w = v$. Обозначим

$$B_n = \{w \mid w = w_1 \ldots w_m a, \ w_1, \ldots, w_m \in W^0_n, \ a \in A_m\},$$
$$D_n = \{w \mid w \in W_n, \ \exists w' \in B_n, \ w \Theta w'\}.$$

Из определения ясно, что $A_n \subseteq B_n$, для всяких $p \in P^0_n$, $a \in a(p)$ имеем $p(a) \in B_n$ и если слово $b \in B_n$ — произведение, $\varepsilon_0(b) \in Z_m$, то $b = w_1 \ldots w_m v^m_t$, $w_1, \ldots, w_m \in W^0_n$, $v^m_t \in V_m$. Так как всякое слово $w \in D_n$ представимо в виде $w = p(a)$, $a \in A_I$, и $h(p(a)) = 1$ только при $p \in P^0_n$, $a = 0^m_\nu$ (тогда $p(a) = 0^n_\nu$), то $D_n \cap Z_n = \varnothing$ при всех $n \in I$.

Лемма 1. *Если $p_1, \ldots, p_r$ — соединяющая слова w, w' неоднородная последовательность полиномов, $p_1 \in P^t_n$, $t > 0$, то существует слово $b \in B_n$ и однородная, соединяющая слова w, b последовательность полиномов $q_1, \ldots, q_s$ такая, что* $\max g(q_i) \leqslant \max g(p_i)$. *Если $t = 1$, $\varepsilon_0(w) \in Z_m$, то b можно представить в виде $b = w_1 \ldots w_m v^m_t$, $w_1, \ldots, w_m \in W^0_n$.*

Доказательство. Пусть $p_1, \ldots, p_k \in P^t_n$, $p_{k+1} \notin P^t_n$, $k < r$. Тогда $p_{k+1} \in P^0_n$, $p_{k+1}(a_{k+1}) = b \in B_n$ и можно взять $q_i = p_i$, $i = 1, \ldots, k$.

При $t=1$, $p_k \in P_n^1$ слово $b = p_k(a'_k)$ является произведением и ввиду $\varepsilon_0(b) = \varepsilon_0(w)$ ясно, что $b = w_1 \dots w_m v_t^m$, $w_1, \dots, w_m \in W_n^0$. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что при всяком $w \in D_n$ имеем либо $w \in B_n$, либо существует $b \in B_n$ и однородная последовательность полиномов, соединяющая слова w, b. Так как всякое $w_1 \dots w_m a \in B_n$ является суммой или произведением одновременно со словом $a \in A_m$ и $A_I = W_I(V)$, то отсюда вытекают следующие две леммы.

Лемма 2. *Если слово $w \in D_n$ — сумма, то $\varepsilon_i(w) \in D_n$ при всех i.*

Лемма 3. *Если слово $w \in D_n$ — произведение и $\varepsilon_0(w) \in Z_m$, то существует $t > 2$ и слово $w' \in W_n$ вида $w' = w_1 \dots w_m u_t^m$, $w_1, \dots, w_m \in W_n^0$ такое, что $\varepsilon_1(w) \Theta w'$.*

Лемма 4. *Если слова $w, w' \in W_n$ имеют вид*

$$w = w_1 \dots w_m z^m,\ w' = w_2,\ w_1, \dots, w_m \in W_n,\ z^m \in Z_m,\ m > 1; \tag{4}$$

$$w = w_1 \dots w_m u_s^m,\ w' = w_1 \dots w_m u_1^m,\ w_1, \dots, w_m \in W_n^0,\ m \in \bar{I},\ s > 1; \tag{5}$$

$$w = w_1 \dots w_m u_s^m,\ w' = w'_1 \dots w'_m u_t^m,\ w_1, \dots, w_m,\ w'_1, \dots, w'_m \in W_n^0,$$
$$m \in \bar{I},\ s, t > 1,\ s \neq t; \tag{6}$$

$$w = w_1 \dots w_m u_s^m,\ w' = w'_1 \dots w'_m a,\quad w_1, \dots, w_m,\ w'_1, \dots, w'_m \in W_n^0,$$
$$m \in \bar{I},\ s > 1,\ a \in A_m, \tag{7}$$

то $w \neq w'$.

Доказательство. В случаях (4) и (5) $h(w) \neq h(w')$, откуда $w \neq w'$.

Случай (6). Предположим, что $s > t$. При $w = w'$ было бы

$$w_1 \dots w_m u_{s-1}^m = \varepsilon_1(w) = \varepsilon_1(w') = w'_1 \dots w'_m u_{t-1}^m, \tag{8}$$

$$w_1 \dots w_m u_1^m = \varepsilon_2(w) = \varepsilon_2(w') = w'_1 \dots w'_m u_1^m \quad (\text{при } m > 1). \tag{9}$$

Из (8) получим $w_1 \dots w_m u_{s-2}^m = w'_1 \dots w'_m u_{t-2}^m$, $w_1 \dots w_m u_{s-3}^m = w'_1 \dots$ $\dots w'_m u_{t-3}^m$ и т.д. до

$$w_1 \dots w_m u_r^m = w'_1 \dots w'_m u_1^m, \tag{10}$$

где $r = s - t + 1$, $r > 1$ ввиду $s > t$. При $m = 1$ (10) неверно, ибо $\varepsilon_0(w_1 u_r^1) = z_2^1 \neq z_1^1 = \varepsilon_0(w'_1 u_1^1)$. При $m > 1$ из (9) и (10) следует $w_1 \dots w_m u_r^m = w_1 \dots w_m u_1^m$, что по доказанному в случае (5) неверно.

Случай (7). Предположим $w = w'$. Ясно, что слово w' должно быть произведением, значит, $w' = w''_1 \dots w''_k v_t^k$, $w''_1, \dots, w''_k \in W_n^0$, $v_t^k \in V_k$, $k \in \bar{I}$, откуда ввиду $\varepsilon_0(w) \in Z_m$, $\varepsilon_0(w''_1 \dots w''_k v_t^k) \in Z_k$ имеем $k = m$.

При $m = 1$ получим противоречие: $\varepsilon_0(w) = \varepsilon_0(w_1 u_s^1) = z_2^1 \neq z_1^1 =$ $= \varepsilon_0(w''_1 v_t^1)$. При $m > 1$

$$w_1 \dots w_m u_{s-1}^m = \varepsilon_1(w) = \varepsilon_1(w') = w''_1 \dots w''_m u_{t+2}^m, \tag{11}$$

$$w_1 \dots w_m u_1^m = \varepsilon_2(w) = \varepsilon_2(w') = w''_1 \dots w''_m u_2^m. \tag{12}$$

При $s - 1 = 1$ из (11) и (12) следует $w''_1 \dots w''_m u_2^m = w''_1 \dots w''_m u_{t+2}^m$, что по доказанному в случае (6) невозможно. При $s-1>1$ из (11) следует $w_1\ldots w_m u_1^m=\varepsilon_2(w_1\ldots w_m u_{s-1}^m)=\varepsilon_2(w_1''\ldots w_m'' u_{t+2}^m)=w_1''\ldots w_m'' u_1^m$ и с помощью (12) получим $w_1''\ldots w_m'' u_2^m=w_1''\ldots w_m'' u_1^m$, что по доказанному в случае (5) неверно. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если* $p(a)=w_1\ldots w_m u_t^m$, $w_1, \ldots, w_m\in W_n^0$, $t>1$, $a\in A_I$, *то* $p=w'_1\ldots w'_{i-1}qw'_{i+1}\ldots w'_m z\in P_n^1$ $(z\in Z_m)$.

Доказательство. Так как слово $p(a)$ — произведение, то $p\in P_n^0$ или $p\in P_n^1$. Если $p\in P_n^0$, то $p(a)=w_1''\ldots w_m'' a$, $w_1'', \ldots, w_m''\in W_n^0$, но по лемме 4 (случай (7)) это невозможно. Следовательно, $p\in P_n^1$ и ввиду $\varepsilon_0(p(a))\in Z_m$ $p=w'_1\ldots w'_{i-1}qw'_{i+1}\ldots w'_m z$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если слова* $w, w'\in W_n$ *имеют вид* (4)—(7), *то* $(w, w')\notin\Theta$.

Доказательство. Предположим противное и выберем среди всех пар слов $(w, w')\in\Theta$ вида (4)—(7) такую пару w, w', для которой $\varrho(w, w')$ было бы наименьшим. Ввиду $w\neq w'$ соединяющие слова w, w' последовательности полиномов существуют; выберем среди них некоторую минимальную последовательность $p_1, \ldots, p_r$ и пусть $a_i, a'_i\in A_I$, $i=1, \ldots, r$, такие, что выполняются (2) и (3). Так как слово $w=$ $=p_1(a_1)$ — произведение, то $p_1\in P_n^0$ или $p_1\in P_n^1$.

Случай (4). Если $p_1\in P_n^0$, то ввиду $\varepsilon_0(w)\in Z_m$ слово $p_1(a_1)=w$ имеет вид $w=w_1''\ldots w_m'' v_t^m$, следовательно, $w'=\varepsilon_2(w)=w_1''\ldots w_m'' u_2^m$, что приводит этот случай к случаю (7).

Если $p_1\in P_n^1$ и последовательность $p_1, \ldots, p_r$ не однородна, то по лемме 1 существует слово $b=w_1''\ldots w_m'' v_t^m\in B_n$ и соединяющая слова w, b однородная последовательность полиномов $q_1, \ldots, q_k$ такая, что $\max\limits_i g(q_i)\leqslant\max\limits_i g(p_i)$. Тогда $w\Theta b$, $\varrho(w, b)\leqslant\varrho(w, w')$ и $w'=$ $=\varepsilon_2(w)\Theta\varepsilon_2(b)=w_1''\ldots w_m'' u_2^m$, $\varrho(w', w_1''\ldots w_m'' u_2^m)<\varrho(w, b)$. Следовательно, $w_1''\ldots w_m'' u_2^m\Theta w'\Theta b=w_1''\ldots w_m'' v_t^m$, $\varrho(w_1''\ldots w_m'' u_2^m, w_1''\ldots w_m'' v_t^m)\leqslant$ $\leqslant\varrho(w, w')$, что приводит этот случай к случаю (7).

Если $p_1\in P_n^1$ и последовательность $p_1, \ldots, p_r$ однородна, то $w'=w_1''\ldots w_m'' z^m$, $w'=\varepsilon_2(w)\Theta\varepsilon_2(w')=w_2''$, $\varrho(w', w_2'')<\varrho(w, w')$, но так как w', w_2'' имеют вид (4), то это — противоречие.

В случаях (5)—(7) $p_1\in P_n^1$ по лемме 5. Если здесь последовательность $p_1, \ldots, p_r$ не однородна, то согласно лемме 1 существует слово $b\in B_n$, $w\Theta b$, такое, что $\varrho(w, b)\leqslant\varrho(w, w')$, что приводит этот случай к случаю (7) с однородной последовательностью. Поэтому в случаях (5)—(7) будем считать, что последовательность $p_1, \ldots, p_r$ — однородна. Так как слово w — произведение, то слово w' — тоже произведение. Поэтому в случае (5) можно предположить, что слова $w_1, \ldots, w_m$ не являются пустыми, а в случае (7) $w'=w_1'\ldots w_m' v_t^m$.

Случай (5). При $m=1$ ввиду $s>1$ имеем $\varepsilon_0(w)=z_2^1\neq z_1^1=$ $=\varepsilon_0(w')$. При $m>1$ получаем $w_1\ldots w_m z^m=\varepsilon_2(w)\Theta\varepsilon_2(w')=w_2$, $\varrho(w_1\ldots w_m z^m, w_2)<\varrho(w, w')$. Так как слова $w_1\ldots w_m z^m, w_2$ имеют вид (4), то это противоречит выбору слов w, w'.

Случай (6). Пусть $s > t$. Тогда $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_{s-1} = \varepsilon_1(w)\Theta\varepsilon_1(w') = w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_{t-1}$, $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_1 = \varepsilon_2(w)\Theta\varepsilon_2(w') = w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_1$ (если $m > 1$) и

$$\varrho(w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_{s-1},\ w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_{t-1}) < \varrho(w, w'), \tag{13}$$

$$\varrho(w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_1,\ w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_1) < \varrho(w, w'). \tag{14}$$

Если $t-1 > 1$, то слова $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_{s-1}$, $w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_{t-1}$ имеют вид (6), так что (13) противоречит выбору слов w, w'.

Пусть $t-1=1$. Если $m > 1$, то из (13) и (14) ввиду $t-1=1$ следует $\varrho(w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_{s-1},\ w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_1) < \varrho(w, w')$. Так как $s-1 > t-1 = 1$, то $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_{s-1}$, $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_1$ имеют вид (5), что противоречит выбору слов w, w'.

Пусть $m=1$ и $p'_1, \ldots, p'_r$ — некоторая минимальная соединяющая слова $w_1 \overset{1}{u}_{s-1}$, $w'_1 u'_1$ последовательность полиномов (по лемме 4 $w_1 \overset{1}{u}_{s-1} \neq w'_1 \overset{1}{u}_1$). Так как $s-1 > t-1 = 1$, то $p_1 \in P^1_n$ по лемме 5. Последовательность $p'_1, \ldots, p'_r$ не может быть однородной, ибо $\varepsilon_0(w_1 \overset{1}{u}_{s-1}) = \overset{1}{z}_2 \neq \overset{1}{z}_1 = \varepsilon_0(w'_1 \overset{1}{u}_1)$. Поэтому существует слово $a\overset{1}{v}_t \in B_n$ такое, что $w_1 \overset{1}{u}_{s-1} \Theta a \overset{1}{v}_t$, $\varrho(w_1 \overset{1}{u}_{s-1}, a\overset{1}{v}_t) < \varrho(w, w')$. Так как слова $w_1 \overset{1}{u}_{s-1}$, $a\overset{1}{v}_t$ имеют вид (7), то это противоречит выбору слов w, w'.

Случай (7). Как отмечалось выше, здесь $w' = w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{v}_t$. При $m=1$ приходим к противоречию: $\varepsilon_0(w) = \overset{1}{z}_2 \neq \overset{1}{z}_1 = \varepsilon_0(w')$. При $m > 1$ имеем $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_{s-1} = \varepsilon_1(w)\Theta\varepsilon_1(w') = w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_{t+2}$, $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_1 = \varepsilon_2(w)\Theta\varepsilon_2(w') = w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_2$ и

$$\varrho(w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_{s-1},\ w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_{t+2}) < \varrho(w, w'), \tag{15}$$

$$\varrho(w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_1,\ w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_2) < \varrho(w, w'). \tag{16}$$

При $s-1=1$ из (15) и (16) следует

$$\varrho(w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_{t+2},\ w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_2) < \varrho(w, w').$$

Так как $w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_{t+2}$, $w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_2$ имеют вид (6), то это противоречит выбору слов w, w'.

Пусть $s-1 > 1$. При $s-1 \neq t+2$ неравенство (15) — противоречие. Поэтому предположим $s-1 = t+2 = k$.

Если $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_k = w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_k$, то $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_{k-1} = \varepsilon_1(w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_k) = \varepsilon_1(w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_k) = w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_{k-1}$, $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_{k-2} = w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_{k-2}$ и т. д. до $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_2 = w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_2$, т. е. $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_2 \Theta w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_2$,

$$\varrho(w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_2,\ w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_2) < \varrho(w, w'). \tag{17}$$

Ввиду (16) отсюда следует $\varrho(w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_2,\ w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_1) < \varrho(w, w')$. Так как слова $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_2$, $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_1$ имеют вид (5), то это является противоречием.

Пусть $w_1 \ldots w_m \overset{m}{u}_k \neq w'_1 \ldots w'_m \overset{m}{u}_k$ и $q_1, \ldots, q_r$ — некоторая минимальная соединяющая их последовательность полиномов, где $q_1 \in P^1_n$

по лемме 5. Если последовательность $q_1, \ldots, q_r$ не однородна, то существует слово $b \in B_n$ такое, что $w_1 \ldots w_m u_k^m \Theta b$, $\varrho(w_1 \ldots w_m u_k^m, b) \leqslant \varrho(w_1 \ldots w_m u_k^m, w'_1 \ldots w'_m u_k^m) < \varrho(w, w')$.

Так как слова $w_1 \ldots w_m u_k^m$, b имеют вид (7), то это противоречит выбору слов w, w'. Если последовательность $q_1, \ldots, q_r$ однородна, то $w_1 \ldots w_m u_{k-1}^m = \varepsilon_1(w_1 \ldots w_m u_k^m) \Theta \varepsilon_1(w'_1 \ldots w'_m u_k^m) = w'_1 \ldots w'_m u_{k-1}^m$, $\varrho(w_1 \ldots w_m u_{k-1}^m, w'_1 \ldots w'_m u_{k-1}^m) < \varrho(w, w')$. Применяя для слов $w_1 \ldots w_m u_{k-1}^m$, $w'_1 \ldots w'_m u_{k-1}^m$ точно такие же рассуждения, как для слов $w_1 \ldots w_m u_k^m$, $w'_1 \ldots w'_m u_k^m$, после нескольких шагов приходим либо к противоречию, либо к утверждению (17), откуда, как и выше, опять следует противоречие. Лемма доказана.

Лемма 7. *Если слово $w \in D_n$ — произведение, $\varepsilon_0(w) \in Z_m$, то существует слово $w' = w_1 \ldots w_m u_t^m$, $w_1, \ldots, w_m \in W_n^0$, $t > 2$, такое, что $\varepsilon_1(w) \Theta w'$ и индекс t определяется однозначно, т. е. если $\varepsilon_1(w) \Theta w''_1 \ldots w''_m u_s^m$, то $s = t$.*

Доказательство. Первое утверждение доказано леммой 3, а однозначность t следует из леммы 6. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если $p(a) \Theta w_1 \ldots w_m u_t^m$, где $a \in A_I$, $w_1, \ldots, w_m \in W_n^0$, $t > 1$, то $p = w'_1 \ldots w'_{i-1} q w'_{i+1} \ldots w'_m z^m \in P_n^1$ и $\varepsilon_1(p(a)) \Theta w_1 \ldots w_m u_{t-1}^m$.*

Доказательство. При $p(a) = w_1 \ldots w_m u_t^m$ утверждение доказано леммой 5. Поэтому предположим, что $p_1, \ldots, p_r$ — соединяющая слова $w' = p(a)$, $w = w_1 \ldots w_m u_t^m$ последовательность полиномов. Обозначим $p_{r+1} = p$, $a_{r+1} = a'_{r+1} = a$. Если предположить, что последовательность $p_1, \ldots, p_{r+1}$ не однородна, то существовало бы слово $b \in B_n$ такое, что $w \Theta b$, но из леммы 6 (случай (7)) следует, что это невозможно. Поэтому последовательность $p_1, \ldots, p_{r+1}$ должна быть однородной и $\varepsilon_1(p(a)) = \varepsilon_1(w') \Theta \varepsilon_1(w_1 \ldots w_m u_t^m) = w_1 \ldots w_m u_{t-1}^m$. Ввиду $p_1(a_1) = w_1 \ldots w_m u_t^m$, $t > 1$, согласно лемме 5 имеем $p_1 \in P_n^1$, откуда $p = p_{r+1} \in P_n^1$. Лемма доказана.

Лемма 9. *Если слово $p(a)$, $a \in A_I$, — произведение, $\varepsilon_0(p(a)) \in Z_m$ и $\varepsilon_i(p(a)) \in D_n$, $i = 1, \ldots, m$, то $p = w_1 \ldots w_{i-1} q w_{i+1} \ldots w_m z^m \in P_n^1$.*

Доказательство. Так как слово $p(a)$ — произведение, то $p \in P_n^0$ или $p \in P_n^1$. Если предположить $p \in P_n^0$, то $p(a) = w'_1 \ldots w'_m v_t^m$, значит, $\varepsilon_1(p(a)) = w_1 \ldots w_m u_{t+2}^m$ и ввиду $\varepsilon_1(p(a)) \in D_n$ существует слово $b \in B_n$ такое, что $w'_1 \ldots w'_m u_{t+2}^m \Theta b$, но из леммы 6 (случай (7)) следует, что это невозможно. Поэтому $p \in P_n^1$, а так как $\varepsilon_0(p(a)) \in Z_m$, то $p = w_1 \ldots w_{i-1} q w_{i+1} \ldots w_m z^m$. Лемма доказана.

Определим при всех $n \in I$ индуктивно отображение $f: D_n \to A_n$.

0.1. Положим $f(0_\nu^n) = 0_\nu^n$ при всех $n \in I$, $\nu \in \Omega_0$.

Ввиду $Z_I \cap D_I = \varnothing$ этим отображение f для всех слов из D_I весом 1 определено. Пусть $w \in D_n$, $h(w) = h$, $h > 1$, и отображение f уже определено для всех слов из D_I весом $< h$.

0.2. При $w = \overset{\omega}{\Sigma} w_i$ положим $f(w) = \overset{\omega}{\Sigma} f(w_i)$.

0.3. Если слово w — произведение, $\varepsilon_0(w) \in Z_m$, то согласно лемме 7 однозначно определен индекс $t > 2$ такой, что $\varepsilon_1(w)\Theta w_1 \dots w_m \overset{m}{u_t}$. Если

$$\left.\begin{array}{l}\text{слово } w' = \varepsilon_1^t(w)^{**} \text{ — произведение, } \varepsilon_0(w') \in Z_m \text{ и } \varepsilon_i(w) \in D_n \\ \text{при всех } i = 1, \dots, m,\end{array}\right\} \quad (18)$$

то положим $f(w) = f(\varepsilon_1(w')) \dots f(\varepsilon_m(w')) \overset{m}{v_{t+2}}$. Если (18) не выполняется, то положим $f(w) = \overset{m}{v_{t+2}}$.

Лемма 10. *Пусть* $w = w_1 \dots w_m a$, $w_1, \dots, w_m \in W_n^0$, $a \in A_m$. *Если* $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq D_n$, *то* $f(w) = f(w_1) \dots f(w_m) a$, *иначе* $f(w) = a$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по весу $h_v(a)$ слова a над множеством V_I. Пусть $h_v(a) = 1$. При $a = 0_v^m$ имеем $w = 0_v^n$ и по 0.1 $f(w) = 0_v^n$, так что утверждение леммы выполняется. При $a = \overset{m}{v_t}$ слово w — произведение и $\varepsilon_1(w) = w_1 \dots w_m \overset{m}{u_{t+2}}$. Так как $\varepsilon_i(\varepsilon_1^{t+2}(w)) = w_i$, то утверждение леммы следует непосредственно из 0.3.

Пусть натуральное число $h > 1$, $h_v(a) = h$ и утверждение уже доказано во всех случаях, когда $h_v(a) < h$.

Если $a = \overset{\omega}{\Sigma} a_i$, то $w = \overset{\omega}{\Sigma} w_1 \dots w_m a_i$ и утверждение леммы следует из определения 0.2, так как для слов $w_1 \dots w_m a_i$ по предположению индукции лемма уже доказана.

Если $a = a_1 \dots a_l \overset{l}{v_t}$, то $w = (w_1 \dots w_m a_1) \dots (w_1 \dots w_m a_l) \overset{l}{v_t}$. Ввиду $h_v(\overset{l}{v_t}) = 1$ по предположению индукции $f(w) = f(w_1 \dots w_m a_1) \dots f(w_1 \dots \dots w_m a_l) \overset{l}{v_t}$, а ввиду $h_v(a_i) < h_v(a)$ для слов $w_1 \dots w_m a_i$ лемма уже доказана. Отсюда ясно, что для слова w утверждение леммы выполняется. Лемма доказана.

Лемма 11. *Если* $p(a)$, $p(a') \in D_n$, $a \varrho a'$, *то* $f(p(a)) \varrho f(p(a'))$.

Доказательство. Применим индукцию по $g(p)$. При $p = \xi^n$ по лемме 10 $f(p(a)) = f(a) = a \varrho a' = f(a') = f(p(a'))$.

Если $p = w_1 \dots w_m \xi^m$, то по лемме 10 при $\{w_1, \dots, w_m\} \nsubseteq D_n$ имеем $f(p(a)) = a \varrho a' = f(p(a'))$, а при $\{w_1, \dots, w_m\} \subseteq D_n$ $f(p(a)) = f(w_1) \dots f(w_m) a \varrho f(w_1) \dots f(w_m) a' = f(p(a'))$, так как $f(w_1), \dots, f(w_m)$, a, $a' \in A_I$ и ϱ — конгруэнция Ω-системы A_I.

Если $p = w_1 \dots w_{i-1} q w_{i+1} \dots w_m \omega$, то ввиду $p(a)$, $p(a') \in D_n$ согласно лемме 2 имеем $w_1, \dots, w_{i-1}, w_{i+1}, \dots, w_m$, $q(a)$, $q(a') \in D_n$. Так как по предположению индукции $f(q(a)) \varrho f(q(a'))$, то утверждение следует из определения 0.2 и факта, что ϱ — конгруэнция на Ω-системе A_I.

Если $p = w_1 \dots w_{i-1} p_1 w_{i+1} \dots w_m z$, $z \in Z_m$, то слова $p(a)$, $p(a')$ — произведения. Из определения 0.3 ясно, что при $i > 1$ имеем $f(p(a)) = f(p(a'))$. Предположим $i = 1$.

По лемме 7 существуют слова $w'_1 \dots w'_m u_{t'}^m$, $w''_1 \dots w''_m u_{t''}^m$ такие, что

$$\left.\begin{array}{l}\varepsilon_1(p(a)) = p_1(a)\Theta w'_1 \dots w'_m u_{t'}^m, \\ \varepsilon_1(p(a')) = p_1(a')\Theta w''_1 \dots w''_m u_{t''}^m,\end{array}\right\} \quad (19)$$

причем t', t'' определяются однозначно. Поэтому $t' = t'' = t$ ввиду $p_1(a)\Theta p_1(a')$.

** Здесь $\varepsilon_1^1(w) = \varepsilon_1(w)$, $\varepsilon_1^{t+1}(w) = \varepsilon_1(\varepsilon_1^t(w))$, $t = 1, 2, \dots$.

Из (19) согласно лемме 8 следует $p_1 = w_{11} \dots w_{1i(1)-1} p_2 w_{1i(1)+1} \dots$ $\dots w_{1m} z_1$, $z_1 \in Z_m$ и

$$\varepsilon_1^2 (p(a)) = \varepsilon_1 (p_1(a)) \Theta w'_1 \dots w'_m u_{t-1}^m. \tag{20}$$

Если $i(1) > 1$, то $\varepsilon_1^2(p(a)) = \varepsilon_1^2(p(a'))$ и по 0.3 $f(p(a)) = f(p(a'))$. При $i(1) = 1$ из (20) следует $p_2 = w_{21} \dots w_{2i(2)-1} p_3 w_{2i(2)+1} \dots w_{2m} z_2$, $z_2 \in Z_m$. Продолжая аналогичным образом, получаем, что либо $f(p(a)) = f(p(a'))$, либо (если $i(1) = i(2) = \dots = i(t-1) = 1$) существует полином q такой, что $\varepsilon_1^t (p(a)) = q(a)$, $\varepsilon_1^t (p(a')) = q(a')$. Обозначим $q(a) = c$, $q(a') = c'$.

Если для слова c выполняется (18), то по лемме 9 $q = c_1 \dots$ $\dots c_{i-1} q_1 c_{i+1} \dots c_m z$. Тогда слово $c' = q(a')$ — тоже произведение и $\varepsilon_j(c) = c_j = \varepsilon_j(c')$ при $j \neq i$, $\varepsilon_i(c) = q_1(a) \Theta q_1(a') = \varepsilon_i(c')$. Отсюда ясно, что для c' (18) тоже выполняется. Поэтому по 0.3

$$f(p(a)) = f(c_1) \dots f(c_{i-1}) f(q(a)) f(c_{i+1}) \dots f(c_m) v_{t-2}^m,$$
$$f(p(a')) = f(c_1) \dots f(c_{i-1}) f(q(a')) f(c_{i+1}) \dots f(c_m) v_{t-2}^m.$$

По предположению индукции $f(q(a)) \varrho f(q(a'))$ и так как ϱ — конгруэнция Ω-системы A_I, то отсюда следует $f(p(a)) \Theta f(p(a'))$.

Аналогично, если для c' выполняется (18), то $f(p(a)) \Theta f(p(a'))$. Если же для c, c' условие (18) не выполняется, то по 0.3 имеем $f(p(a)) = v_{t-2}^m = f(p(a'))$. Лемма доказана.

Для доказательства равенства (1) достаточно показать, что при любых $a, a' \in A_I$ из $a \Theta a'$ следует $a \varrho a'$. Пусть $p_1, \dots, p_r$ — соединяющая слова a, a' последовательность полиномов, a_i, a_i', $i = 1, \dots, r$, такие, что выполняются (2) и (3). Тогда $p_1(a_1) = a \in B_n \subseteq D_n$ и ввиду $p_i(a_i) \Theta p_i(a_i') = p_{i+1}(a_{i+1})$ имеем $p_i(a_i) \in D_n$, $i = 1, \dots, r$, так что для всех слов $p_i(a_i)$, $i = 1, \dots, r$, определено отображение f. Так как $f(p_1(a_1)) = a$, $f(p_r(a_r')) = a'$, $f(p_i(a_i)) \varrho f(p_i(a_i'))$ и ϱ транзитивна, то $a \varrho a'$. Теорема доказана.

При $\Omega = \varnothing$, $0 \notin I$ из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1. Всякую конечную или счетную систему Менгера A_I можно вложить в систему Менгера, которая при $1 \in I$ имеет $|I| + 1$, а при $1 \notin I$ — $|I|$ образующих. ***

При $I = \{m\}$, $m > 0$ получим

Следствие 2. Всякий m-арный Ω-кольцоид с конечным или счетным числом образующих можно при $m > 1$ вложить в m-арный Ω-кольцоид с одним образующим, а при $m = 1$ — с одним или двумя образующими.

При $I = \{m\}$, $m > 1$, $\Omega = \varnothing$ получим

Следствие 3. Всякую конечную или счетную m-полугруппу ($m > 1$) можно вложить в m-полугруппу с одним образующим.

При $\Omega = \varnothing$, $I = \{1\}$ получим теорему Эванса. Так как в полугруппу с одним образующим можно вложить не всякую полугруппу, то ясно, что в общем случае (при произвольных I, Ω) доказанную теорему улучшить нельзя.

Доказанную теорему можно применить также для изучения представимости [5] универсальных алгебр. Пусть $\mathfrak{G} = \langle G, \Omega \rangle$ — Ω-алгебра. Определим индуктивно регулярные производные операции ал-

*** $|X|$ — мощность множества X.

гебры $\mathfrak{G}$: всякая $\omega \in \Omega$ является регулярной производной операцией алгебры $\mathfrak{G}$, и если $\omega_1, \ldots, \omega_m$ m-арные ($m > 0$) регулярные производные операции, $\omega \in \Omega_m$, то $\omega_1 \ldots \omega_m \omega$ — также регулярная производная операция алгебры $\mathfrak{G}$, действие которой определяется следующим образом: $\bar{\alpha}(\omega_1 \ldots \omega_m \omega) = (\bar{\alpha}\omega_1) \ldots (\bar{\alpha}\omega_m)\omega$ при любом $\bar{\alpha} \in G^m$.

Будем говорить, что универсальная алгебра $\mathfrak{H} = \langle H, \Sigma \rangle$ регулярно представима в алгебре $\mathfrak{G} = \langle G, \Omega \rangle$, если у алгебры $\mathfrak{G}$ существует такая совокупность $\bar{\Omega}$ регулярных производных операций, что $\mathfrak{H}$ можно вложить в алгебру $\langle G, \bar{\Omega} \rangle$ (это понятие представляет собой частный случай представимости универсальных алгебр, рассмотренной в [5]). Легко проверить, что при $X_0 = H$, $X_m = \Sigma_m$, $Y_0 = G$, $Y_m = \Omega_m$, $m \in \bar{I}$, из доказанной теоремы вытекает

Следствие 4. Пусть $\mathfrak{H} = \langle H, \Sigma \rangle$ — такая универсальная алгебра, что $\Sigma \backslash \Sigma_0$ конечно или счетно. Тогда существует универсальная алгебра $\mathfrak{G} = \langle G, \Omega \rangle$, в которой алгебра $\mathfrak{H}$ регулярно представима и которая имеет не более двух унарных и одну m-арную операцию для всякого $m > 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Evans T., Embedding theorems for multiplicative systems and projective geometria, Proc. Amer. Math. Soc., 3, 614—620 (1952).
2. Хенно Я. А., Свободные Ω-системы, Тр. Таллинск. политехн. ин-та, **VII**, № 345, 29—39 (1973).
3. Глускин Л. М., Суперпозиция многоместных функций, Publ. Math., **17**, 349—378 (1970).
4. Хион Я. В., m-арные Ω-кольцоиды, Сиб. матем. ж., 7, № 1, 174—194 (1967).
5. Ребане Ю. К., О представлении универсальных алгебр в коммутативных полугруппах, Сиб. матем. ж., **4**, 878—883 (1966).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 4/III 1974

J. HENNO

Ω-SÜSTEEMIDE SISESTAMINE MINIMAALSE MOODUSTAJATE HULGAGA Ω-SÜSTEEMIDESSE

Tõestatakse, et kui Ω-süsteemi K moodustajate hulga $X = \{X_n,\ n \in I\}$ alamhulk $\bigcup_{n>0} X_n$ on lõplik või loenduv, siis K on sisestatav sellise moodustajate hulgaga $Y = \{Y_n,\ n \in I\}$ Ω-süsteemi, et Y_1 sisaldab mitte rohkem kui kaht ja iga Y_m, $m > 1$, — üht elementi. Sellest teoreemist järeldub rida analoogilisi teoreeme, teiste hulgas ka Evansi teoreem iga lõpliku või loenduva poolrühma sisestatavusest kahe moodustajaga poolrühma.

J. HENNO

EMBEDDING Ω-SYSTEMS INTO Ω-SYSTEMS WITH A MINIMAL SET OF GENERATORS

It is proved that if Ω-system K has a set of generators $X = \{X_n,\ n \in I\}$ and $\bigcup_{n>0} X_n$ is finite or countable, then K can be embedded into an Ω-system with a set of generators $Y = \{Y_n,\ n \in I\}$ where Y_1 consists of no more than two elements and every Y_m, $m > 1$, of one element. From that theorem follows Evans' theorem about the embeddability of every finite or countable semigroup into a semigroup with two generators.