EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 23. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1974, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 23
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1974, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1974.4.01

УДК 519.3:62-50

С. УЛЬМ

О СВЯЗИ МЕЖДУ ПРИНЦИПОМ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ И НЕКОТОРЫМИ МЕТОДАМИ ДЕКОМПОЗИЦИИ

В данной работе для решения некоторых классов задач нелинейного программирования устанавливается связь между принципом прогнозирования взаимодействий [1] и методами декомпозиции, основанными соответственно на методах условного градиента [2, 3] и покомпонентного спуска [4, 5]. Показывается, что специальный выбор так наз. функций взаимодействия позволяет трактовать эти методы декомпозиции как частные применения общего принципа координации. Доказываются некоторые общие теоремы о координируемости в двухуровневых системах оптимизации.

1. Представим задачу нелинейного программирования в виде

$$f(x_1, \ldots, x_n) \to \min_{x \in X}, \qquad (1)$$

где

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n, \qquad (2)$$

т. е. $x_i \in X_i$; $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in_i})$ — в общем векторы.

Отметим, что множества X_i обычно задаются следующим образом:

$$X_i = \{x_i \mid h_{ij}(x_i) \leqslant 0;\ j = 1, \ldots, m_i\}. \qquad (3)$$

При наличии также ограничений типа

$$g_k(x_1, \ldots, x_n) \leqslant 0 \qquad (4)$$

допустим, что они уже учтены в виде некоторых штрафов в целевой функции $f(x)$.

Разложим первоначальную задачу (1)—(2) некоторым образом на подзадачи

$$f_i(x_i, \alpha_i) \to \min_{x_i \in X_i} \qquad (i = 1, \ldots, n). \qquad (5)$$

При фиксированном α_i обозначим решение (не обязательно единственное) i-й подзадачи (5) через $x_i(\alpha_i)$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Задача второго уровня (центра) состоит в нахождении таких координирующих входов $\hat{\alpha}_i$, чтобы

$$x_i(\hat{\alpha}_i) = \hat{x}_i \qquad (i = 1, \ldots, n), \qquad (6)$$

где $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ — решение задачи (1)—(2).

Для осуществления процесса координации в [1] введены так наз. функции взаимодействия $K_i(x)$ $(i=1, \dots, n)$, связывающие подзадачи (5) с общей задачей (1)—(2). Пусть $\{\alpha_i\} = K_i(X) = A_i$ $(i = 1, \dots, n)$. Для каждых α_i можно вычислить значения $K_i(x(\alpha))$, где $x(\alpha) = (x_1(\alpha_1), \dots, x_n(\alpha_n))$ — некоторый вектор решения подзадач.

Будем говорить (ср. [1]), что при выбранных $f_i(x_i, \alpha_i)$ и $K_i(x)$

а) к задаче (1)—(2) применим принцип прогнозирования взаимодействий, если из предположения выполнения равенств

$$\alpha_i = K_i(x(\alpha)) \quad (i=1, \dots, n) \tag{7}$$

следует

$$x(\alpha) = \hat{x}; \tag{8}$$

б) задача (1)—(2) разрешима (или координируема) с помощью принципа прогнозирования взаимодействий, если этот принцип применим и существуют такие α_i, при которых равенства (7) выполняются.

В [1] доказаны также некоторые общие теоремы, дающие достаточные условия для того, чтобы задача (1)—(2) была координируемой с помощью принципа прогнозирования взаимодействий.

2. Для получения более конкретных результатов рассмотрим случай, где

$$K(x) = K_1(x) = \dots = K_n(x) = x \tag{9}$$

и

$$\alpha = \alpha_1 = \dots = \alpha_n = (\alpha^1, \dots, \alpha^n) \subset A = X, \tag{10}$$

причем $\dim \alpha^i = \dim x_i$.

Задача второго уровня заключается теперь в прогнозировании $\hat{x}$, т. е. в нахождении такого $\hat{\alpha}$, чтобы

$$\hat{\alpha} = x(\hat{\alpha}) = \hat{x}. \tag{11}$$

Теорема 1. *Пусть*

1° $f(x)$ — *выпуклая дифференцируемая функция*;

2° $f_i(x_i, \alpha)$ — *выпуклые дифференцируемые функции для каждого* $\alpha \in X$;

3° X_i — *выпуклые замкнутые ограниченные множества*;

4° *существует* $\alpha \in X$ такой, что

$$\min_{x_i \in X_i} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\alpha^i, \alpha), x_i \right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\alpha^i, \alpha), \alpha^i \right); \tag{12}$$

5° *для каждого* $\alpha \in X$, *удовлетворяющего* (12), *справедливо соотношение*:

$$\sum_{i=1}^{n} \min_{x_i \in X_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha), x_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha), \alpha^i \right)^{*}. \tag{13}$$

---

* Отметим, что в формулах (12) и (13)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_{i1}}, \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial x_{i n_i}} \right).$$

Тогда задача (1)—(2) *разрешима с помощью принципа прогнозирования взаимодействий.*

Доказательство. Условия 1°—3° обеспечивают существование $\hat{x}$ и $x_i(\alpha)$ для каждого $\alpha \in X$.

Пусть $\alpha = x(\alpha)$, т. е. $\alpha^i = x_i(\alpha)$. Тогда на основании необходимых и достаточных условий минимума (см., напр., [6]) для подзадач (5) справедливо

$$\min_{x_i \in X_i} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i(\alpha), \alpha), x_i \right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i(\alpha), \alpha), x_i(\alpha) \right)$$

или

$$\min_{x_i \in X_i} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\alpha^i, \alpha), x_i \right) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(\alpha^i, \alpha), \alpha^i \right),$$

т. е. условия (12) имеют место. На основании условия 5° $\alpha = x(\alpha) = \hat{x}$, поскольку условия минимума для задачи (1)—(2) выполняются. Итак, принцип прогнозирования взаимодействий применим. Поскольку на основании 4° существует $\alpha = x(\alpha)$, то задача (1)—(2) разрешима с помощью принципа прогнозирования взаимодействий. Теорема доказана.

3. Из теоремы 1 следует, что выбор

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_i, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha) = F_i(\alpha) \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{14}$$

всегда обусловливает выполнимость условия 5°.

В этом случае подзадачи (5) выражаются в виде

$$f_i(x_i, \alpha) = (F_i(\alpha), x_i) \to \min_{x_i \in X_i} (i = 1, \ldots, n). \tag{15}$$

Итак, для решения задачи (1)—(2) получен метод декомпозиции, основанный на методе условного градиента [2, 3].

Пусть подзадачи выбраны в виде (15). Тогда справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть*

1° $f(x)$ — *выпуклая дифференцируемая функция;*

2° X_i — *выпуклые замкнутые ограниченные множества.*

Тогда для того, чтобы при выбранном $\alpha \in X$ *существовал* $x(\alpha)$ *такой, что* $\alpha = x(\alpha)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\alpha = \hat{x}$.

Доказательство. 1) Пусть при выбранном α существует $x(\alpha)$ такой, что $\alpha = x(\alpha)$. Тогда на основании необходимых и достаточных условий минимума для подзадач (15) имеет место

$$\min_{x_i \in X_i} (F_i(\alpha), x_i) = (F_i(\alpha), x_i(\alpha))$$

или

$$\min_{x_i \in X_i} (F_i(\alpha), x_i) = (F_i(\alpha), \alpha^i)$$

или

$$\sum_{i=1}^{n} \min_{x_i \in X_i} (F_i(\alpha), x_i) = \sum_{i=1}^{n} (F_i(\alpha), \alpha^i),$$

откуда следует, что $\alpha = \hat{x}$, поскольку условия минимума для задачи (1)—(2) выполняются.

2) Пусть $\alpha = \hat{x}$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} \min_{x_i \in X_i} (F_i(\alpha), x_i) = \sum_{i=1}^{n} (F_i(\alpha), \alpha^i), \tag{16}$$

откуда следует, что при каждом i справедливо

$$\min_{x_i \in X_i} (F_i(\alpha), x_i) = (F_i(\alpha), \alpha^i),$$

т. е. существует $x(\alpha) = \alpha$. Действительно, если бы при некотором i существовало $\bar{x}_i \neq \alpha^i$ такое, что $(F_i(\alpha), \bar{x}_i) < (F_i(\alpha), \alpha^i)$, то (16) не выполнялось бы. Теорема доказана.

Проведем два следствия из теоремы 2.

Следствие 1. При допущениях теоремы 2 для каждого $\alpha \neq \hat{x}$, по крайней мере, при одном значении i справедливо неравенство

$$\min_{x_i \in X_i} (F_i(\alpha), x_i) < (F_i(\alpha), \alpha^i). \tag{17}$$

Следствие 2. При допущениях теоремы 2 задача (1)—(2) разрешима с помощью принципа прогнозирования взаимодействий.

Замечание 1. Отметим, что условие 5° теоремы 1 выполняется также всегда, если выбрать

$$f_i(x_i, \alpha) = f(\alpha^1, \ldots, \alpha^{i-1}, x_i, \alpha^{i+1}, \ldots, \alpha^n). \tag{18}$$

Действительно, тогда

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha^i, \alpha) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha^1, \ldots, \alpha^{i-1}, \alpha^i, \alpha^{i+1}, \ldots, \alpha^n) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\alpha).$$

Этот случай здесь не анализируется, хотя это никаких трудностей не представляет.

4. Для осуществления процесса координации (т. е. для нахождения оптимального α) при выборе подзадач в виде (15) можно использовать итерационный метод (так наз. метод условного градиента)

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + \varepsilon_k (x(\alpha^{(k)}) - \alpha^{(k)}) \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{19}$$

где ε_k — некоторые положительные числа; $x(\alpha^{(k)})$ — некоторый вектор решения подзадач (15) при $\alpha = \alpha^{(k)}$. Сходимость метода (19) при различных выборах ε_k изучалась многими авторами (см., напр., [6, 7]).

На основании теоремы 2 решение выпуклой задачи (1)—(2) сводится к нахождению такого α, чтобы $\alpha = x(\alpha)$ при некотором $x(\alpha)$. Если вектор $x(\alpha)$ при каждом α единственный, то вопрос сводится к решению системы уравнений

$$\alpha = x(\alpha). \tag{20}$$

При этом для решения (20) можно использовать, кроме (19), и другие итерационные методы.

Отметим, что $x(\alpha)$, например, единственный вектор, если множества X_i дополнительно еще строго выпуклые и $F_i(\alpha) \neq 0$ для каждого $\alpha \in X$ $(i = 1, \ldots, n)$ (см. [6]).

Нетрудно показать, что из единственности $x(\alpha)$ и непрерывности $\operatorname{grad} f(\alpha) = F(\alpha)$ следует непрерывность $x(\alpha)$.

Действительно, допустим, что $x(\alpha)$ не является непрерывным. Тогда существует последовательность $\{\alpha_n\}$ такая, что $\alpha_n \to \alpha_0$, но $x(\alpha_n) \to x(\bar{\alpha}) \neq x(\alpha_0)$. Из непрерывности $F(\alpha)$ следует

$$(F(\alpha_n), x(\alpha_n)) \to (F(\alpha_0), x(\bar{\alpha})).$$

Для каждого n имеет место

$$(F(\alpha_n), x(\alpha_n)) \leqslant (F(\alpha_n), x) \quad (x \in X),$$

следовательно,

$$(F(\alpha_n), x(\alpha_n)) \leqslant (F(\alpha_n), x(\alpha_0)).$$

В пределе получим

$$(F(\alpha_0), x(\bar{\alpha})) \leqslant (F(\alpha_0), x(\alpha_0)),$$

что противоречит единственности $x(\alpha)$.

Очень важный, но сложный вопрос о дифференцируемости $x(\alpha)$ здесь не рассматривается.

Если $x(\alpha)$ не является единственным вектором, то можно использовать следующий прием (см. [8]). Пусть

$$S_\alpha = \{x(\alpha) \mid (F(\alpha), x(\alpha)) = \min_{x \in X} (F(\alpha), x)\}. \tag{21}$$

Определим оператор $\varphi(\alpha)$ из X в X с помощью условия

$$\|\alpha - \varphi(\alpha)\| = \min_{x(\alpha) \in S_\alpha} \|\alpha - x(\alpha)\|. \tag{22}$$

Легко видеть, что при сделанных предположениях оператор $\varphi(\alpha)$ является единственным. Итак, для координации вместо (20) можно решить систему уравнений

$$\alpha = \varphi(\alpha). \tag{23}$$

В [8] построен и теоретически исследован ряд итерационных методов типа (19) для решения задачи (23).

5. Принцип прогнозирования взаимодействий может быть обобщен, если вместо условия координации вида (7) рассматривать более общее условие [1]. В качестве примера приведем метод декомпозиции, основанный на методе покомпонентного спуска [4, 5].

Пусть задача нелинейного программирования представлена в виде

$$f(x) = F(\varphi_1(x_1, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_{n-1}, x_n), \varphi_n(x_n)) \to \min_{x \in X}, \tag{24}$$

где

$$X = X_1 \times \ldots \times X_n, \quad \text{т. е.} \quad x_i \in X_i. \tag{25}$$

Допустим, что

а) $f(x)$ — строго выпуклая дифференцируемая функция;

б) X_i — выпуклые замкнутые ограниченные множества;

в) для каждого фиксированного $x_n \in X_n$ справедливо

$$\min_{x_1, \ldots, x_{n-1}} f(x) = F(\min_{x_1} \varphi_1(x_1, x_n), \ldots, \min_{x_{n-1}} \varphi_{n-1}(x_{n-1}, x_n), \varphi_n(x_n)). \tag{26}$$

При этих предположениях:

а) существует единственная точка минимума $\hat{x} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$;

б) метод покомпонентного спуска сходится к $\hat{x}$ (см., напр., [9]);

в) минимизацию по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$ для каждого фиксированного $x_n \in X_n$ можно выполнить независимо и одновременно, Для решения задачи (24)—(25) получаем следующую схему вычислений на двух уровнях:

1) выбирается начальное приближение $x_n^{(0)} \in X_n$;
2) если приближение $x^{(k)}$ построено, то следующее приближение $x^{(k+1)}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ строится по правилам:
   а) подсистемы первого уровня решают задачи

$$\varphi_i(x_i, x_n^{(k)}) \to \min_{x_i \in X_i} \quad (i=1, \ldots, n-1), \tag{27}$$

решения которых обозначим через $x_i^{(k+1)}$;

   б) второй уровень (центр) решает задачу

$$F(\varphi_1(x_1^{(k+1)}, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_{n-1}^{(k+1)}, x_n), \varphi_n(x_n)) \to \min_{x_n \in X_n}, \tag{28}$$

решение которой обозначим через $x_n^{(k+1)}$.

С точки зрения принципа прогнозирования взаимодействий этот метод можно трактовать следующим образом.

Координирующие входы:

$$\alpha = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n \in A = X_n. \tag{29}$$

Функции взаимодействия:

$$K(x) = K_1(x) = \ldots = K_n(x) = x_n. \tag{30}$$

Подзадачи первого уровня:

а) $f_i(x_i, \alpha_i) = \varphi_i(x_i, \alpha) \to \min\limits_{x_i \in X_i}$, решения подзадач обозначим через $x_i(\alpha)$ $(i = 1, \ldots, n-1)$;

б) $f_n(x_n, \alpha_n) = f_n(x_n, \alpha) = \|x_n - \alpha\| \to \min\limits_{x_n \in X_n}$, решение $x_n(\alpha) = \alpha$.

Здесь n-я подзадача фиктивна, так как ее решение всегда α.

Вместо условия координации вида (7) здесь можно использовать более общее условие ($\hat{\alpha}$ — выбранный вторым уровнем координирующий вход)

$$\min_{\alpha \in X_n} F(\varphi_1(x_1(\hat{\alpha}), \alpha), \ldots, \varphi_{n-1}(x_{n-1}(\hat{\alpha}), \alpha), \varphi_n(\alpha)) =$$

$$= F(\varphi_1(x_1(\hat{\alpha}), \hat{\alpha}), \ldots, \varphi_{n-1}(x_{n-1}(\hat{\alpha}), \hat{\alpha}), \varphi_n(\hat{\alpha})). \tag{31}$$

При выполнении условия (31) легко видеть, что

$$x(\hat{\alpha}) = (x_1(\hat{\alpha}), \ldots, x_{n-1}(\hat{\alpha}), \hat{\alpha}) = \hat{x}. \tag{32}$$

Отметим, наконец, что связь принципа прогнозирования взаимодействий с некоторыми другими методами декомпозиции рассматривалась также в [10].

ЛИТЕРАТУРА

1. Месарович М., Мако Д., Такахара И., Теория иерархических многоуровневых систем, М., 1973.
2. Михалевич В. С., Ермольев Ю. М., Шкурба В. В., Шор Н. З., Кибернетика, АН УССР, № 5, 29 (1967).
3. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 245 (1969).
4. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, 147 (1969).

5. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **21**, 208 (1972).
6. Левитин Е. С., Поляк Б. Т., Ж. вычисл. матем. и матем. физики, **6**, 787 (1966).
7. Демьянов В. Ф., Рубинов А. М., Вестник ЛГУ, вып. 19, 5 (1964).
8. Хоменюк В. В., Методы оптимизации, Л., 1973.
9. Гурин Л. С., Деманский Я. С., Меркулов А. Д., Задачи и методы оптимального распределения ресурсов, М., 1968.
10. Dirickx Y. M. J., Jennergren L. P., Peterson D. W., IEEE Trans. Syst., Man and Cybernet., **SMC-3**, No. 5, 514 (1973).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
13/III 1974

S. ULM

KOOSTÖÖ ENNUSTAMISE PRINTSIIBI JA MÕNEDE DEKOMPOSITSIOONIMEETODITE VAHELISEST SEOSEST

Esitatakse seos koostöö ennustamise printsiibi [1] ja mittelineaarse planeerimise mõnede dekompositsioonimeetodite vahel, millised põhinevad vastavalt tingliikul gradiendimeetodil [2,3] ja komponentide järgi minimiseerimise meetodil [4,5]. Näidatakse, et nn. koostööfunktsioonide spetsiaalsel valikul võib neid dekompositsioonimeetodeid vaadelda mainitud üldise printsiibi konkreetsete rakendustena. Tõestatakse mõned üldised teoreemid, mis käsitlevad koordineeruvust kahenivoolistes süsteemides.

S. ULM

ON THE CONNECTION BETWEEN THE INTERACTION PREDICTION PRINCIPLE AND SOME DECOMPOSITION METHODS

A connection between the interaction prediction principle [1] and the decomposition methods of mathematical programming, based on conditional gradient and coordinatewise descent methods [2–5], is established. It is shown that these decomposition methods may be interpreted by special choices of interaction functions as concrete applications of the general principles mentioned. Some general theorems on the coordination in two-level systems are proved.