EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.4.16

УДК 534.21

Ю. ЭНГЕЛЬБРЕХТ

НЕЛИНЕЙНАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕХОДНОГО ВОЛНОВОГО ПРОЦЕССА ДЕФОРМАЦИИ В СЛУЧАЕ СФЕРИЧЕСКОЙ СИММЕТРИИ

J. ENGELBRECHT. DEFORMATSIOONILAINETE ÜLEMINEKUPROTSESSI MITTELINEAARNE MUDEL SFÄÄRILISE SÜMMEETRIA JUHUL

J. ENGELBRECHT. NONLINEAR MODEL OF THE TRANSIENT DEFORMATION WAVE PROPAGATION IN THE CASE OF SPHERICAL SYMMETRY

Рассматривается математическое моделирование переходного волнового процесса на основе нелинейной теории термоупругости в случае сферической симметрии. Выводится квазилинейная система дифференциальных уравнений, позволяющая учитывать геометрическую и физическую нелинейности среды, а также конечную скорость распространения тепловых возмущений.

Уравнения движения в сферической системе координат в наиболее общем виде приведены Д. Р. Блендом [1] для произвольной функции внутренней энергии. В линейной постановке сферические волны исследованы в ряде работ (см. напр., [2–3]). При распространении волн конечной амплитуды большой интерес представляет нелинейная модель среды, учитывающая эффекты второго порядка [4]. Далее предлагается математическая модель термоупругой среды в сферической системе координат, позволяющая учитывать все эффекты второго порядка на основе нелинейной теории термоупругости.

Рассмотрим одномерное движение в сферических координатах

$$x^1 = X^1 + u^1(X^1, t), \quad x^2 = X^2, \quad x^3 = X^3, \tag{1}$$

где x^k, $k=1,2,3$ — эйлеровы переменные, X^K, $K=1,2,3$ — лагранжевы переменные, t — время. Компоненты тензора деформации Грина в этом случае имеют вид

$$2E_{11} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial X^1}\right)^2 - 1, \quad 2E_{22} = 2E_{33} = \left(\frac{x^1}{X^1}\right)^2 - 1, \quad E_{12} = E_{23} = E_{13} = 0. \tag{2}$$

Исходными уравнениями являются законы сохранения импульса и энергии для сплошной среды, записанные в дифференциальной форме в эйлеровых переменных (см. (32.10) и (37.10) в [5]). Используя соотношения между физическими величинами в лагранжевых и в эйлеровых переменных, запишем эти уравнения в лагранжевом представлении. С учетом характера деформации (1) и (2) получим

$$\varrho_0 \frac{\partial^2 r}{\partial t^2} - \left(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{2}{R}\right) \frac{\partial F}{\partial E_{11}} \frac{\partial r}{\partial R} + \left(\frac{\partial F}{\partial E_{22}} + \frac{\partial F}{\partial E_{33}}\right) \frac{r}{R^2} = 0, \tag{3}$$

$$\varrho_0 T \frac{\partial^2 F}{\partial T\, \partial E_{KL}} \frac{\partial E_{KL}}{\partial t} + \varrho_0 T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial R} + \frac{2}{R} Q \frac{\partial r}{\partial R} = 0. \tag{4}$$

В уравнениях (3) и (4) приняты следующие обозначения: T — температура, $Q=Q^1$ — компонент псевдопотока тепла, ϱ_0 — плотность среды в недеформированном состоянии, F — функция свободной энергии Гельмгольца, $x^1\equiv r$, $X^1\equiv R$. Уравнение (3) выведено также Д. Р. Блендом [1] из функции Лагранжа.

Как известно, в теории сплошной среды необходимо постулировать уравнение теплопроводности, которое здесь выберем в виде

$$\tau_0\frac{\partial Q}{\partial t}+Q=k\frac{\partial T}{\partial R}, \tag{5}$$

где τ_0 — время релаксации, k — коэффициент теплопроводности. Уравнения (3)—(5) при формулировании функции F представляют собой замкнутую систему уравнений.

Представим функцию свободной энергии в виде

$$\varrho_0F=\frac{1}{2}\lambda K_1^2+\mu K_2+\nu_1K_1^3+\nu_2K_1K_2+\nu_3K_3-\varkappa K_1(T-T_0)-$$
$$-\frac{1}{2}\varrho_0c_ET_0^{-1}(T-T_0)^2, \tag{6}$$

где инварианты тензора деформации K_i определены соотношениями

$$K_1=E_{II},\quad K_2=E_{IJ}E_{IJ},\quad K_3=E_{IJ}E_{JL}E_{IL}. \tag{7}$$

Здесь λ, μ — постоянные Ляме; ν_1, ν_2, ν_3 — постоянные упругости третьего порядка; $\varkappa=(3\lambda+2\mu)\alpha_T$; α_T — коэффициент линейного расширения, c_E — удельная теплоемкость, отнесенная к единице массы.

Введем в рассмотрение безразмерные величины

$$\xi=\frac{R}{R_0},\quad \tau=\frac{tc_0}{R_0},\quad U=\frac{\varrho c_0^2}{\varkappa T_0}\frac{u}{R_0},\quad \Theta=\frac{T-T_0}{T_0},\quad P=\frac{QR_0}{kT_0},$$
$$\sigma_{KK}=\frac{T^{KK}}{\varkappa T_0}, \tag{8}$$

где $c_0^2=(\lambda+2\mu)\varrho_0^{-1}$, R_0 — некоторый характерный радиус, T^{KK} — компоненты тензора псевдонапряжения.

Подставляя соотношение (6) в уравнения (3) и (4) с учетом (1), (2), (5), (7) и (8), получим в окончательном виде

$$\left[1+3(1+b_0)\varepsilon\frac{\partial U}{d\xi}+2(b_1+b_2)\varepsilon\frac{U}{\xi}-\varepsilon\Theta\right]\frac{\partial^2U}{\partial\xi^2}+$$
$$+2\left[1+\frac{1}{2}(3+3b_0+b_1+b_2)\varepsilon\frac{\partial U}{\partial\xi}+(b_1+2b_2)\varepsilon\frac{U}{\xi}-\varepsilon\Theta\right]\frac{1}{\xi}\frac{\partial U}{\partial\xi}- \tag{9}$$
$$-2\left[1+(b_1+2b_2+b_3)\varepsilon\frac{U}{\xi}-\varepsilon\Theta\right]\frac{1}{\xi}\frac{U}{\xi}-\left(1+\varepsilon\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}=\frac{\partial^2U}{\partial\tau^2},$$

$$\frac{1}{\omega}\frac{\partial P}{\partial\xi}+\frac{2}{\omega}\left(1+\varepsilon\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)\frac{P}{\xi}=(1+\Theta)\frac{\partial\Theta}{\partial\tau}+e(1+\Theta)\left(1+\varepsilon\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)\frac{\partial^2U}{\partial\xi\,\partial\tau}+$$
$$+e(1+\Theta)\left(1+\varepsilon\frac{U}{\xi}\right)\frac{2}{\xi}\frac{\partial U}{\partial\tau}, \tag{10}$$

$$\beta\frac{\partial P}{\partial\tau}+P=\frac{\partial\Theta}{\partial\xi}. \tag{11}$$

Безразмерные напряжения, соответствующие функции энергии в форме (6), определяются в виде

$$\sigma_{RR}=\frac{\partial U}{\partial\xi}+2b_1\frac{U}{\xi}+\frac{3}{2}(1+b_0)\varepsilon\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)^2-(3b_1-2b_2-6b_4)\varepsilon\frac{U^2}{\xi^2}-$$

$$-2(1-b_1-2b_2)\varepsilon\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{U}{\xi}-\left(1+\varepsilon\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)\Theta+2\varepsilon\frac{U}{\xi}\Theta, \qquad (12)$$

$$\sigma_{\alpha\alpha}=b_1\frac{\partial U}{\partial\xi}+(1+b_1)\frac{U}{\xi}+\frac{1}{2}(1+3b_0+b_1+6b_2)\varepsilon\frac{U^2}{\xi^2}-$$

$$-(1+b_1-2b_2-6b_4)\varepsilon\frac{\partial U}{\partial\xi}\frac{U}{\xi}-\frac{1}{2}(b_1-2b_2)\varepsilon\left(\frac{\partial U}{\partial\xi}\right)^2-\Theta+\varepsilon\frac{\partial U}{\partial\xi}\Theta. \qquad (13)$$

В уравнениях и соотношениях (9)—(13) использованы следующие обозначения безразмерных параметров:

$$\epsilon=\varkappa^2T_0[(\lambda+2\mu)\varrho_0c_E]^{-1},\quad \beta=c_0\tau_0R_0^{-1},\quad \omega=R_0\varrho_0c_Ec_0k^{-1},$$
$$\varepsilon=\varkappa T_0(\lambda+2\mu)^{-1},\quad b_0=2(\nu_1+\nu_2+\nu_3)(\lambda+2\mu)^{-1},\quad b_1=\lambda(\lambda+2\mu)^{-1}, \qquad (14)$$
$$b_2=(3\nu_1+\nu_2)(\lambda+2\mu)^{-1},\quad b_3=(2\lambda+3\mu+6\nu_1+4\nu_2+3\nu_3)(\lambda+2\mu)^{-1},$$
$$b_4=\nu_1(\lambda+2\mu)^{-1}.$$

Начальные условия для системы уравнений (9)—(11) обычно предполагаются нулевыми. Краевые условия могут быть представлены, например, в виде

$$\sigma_{RR}(\xi,\tau)|_{\xi=\xi_1}=a_1\varphi_1(\tau)H(\tau),\quad \sigma_{RR}(\infty,\tau)=0, \qquad (15)$$

$$\Theta(\xi,\tau)|_{\xi=\xi_1}=a_2\varphi_2(\tau)H(\tau),\quad \Theta(\infty,\tau)=0, \qquad (16)$$

где a_i, $i=1,2$, — постоянные, характеризующие максимальную амплитуду; $\varphi_i(\tau)$, $i=1,2$, — непрерывные в общем случае функции, удовлетворяющие условиям

$$\varphi_i(0)=0,\quad |\varphi_i(\tau)|<1,\quad i=1,2. \qquad (17)$$

Если имеется вторая граница $\xi=\xi_2$, то и для нее следует сформулировать соответствующие краевые условия (свободная или защемленная граница, условие теплообмена между телом и окружающей средой).

Систему уравнений (9)—(11) удобно решать методом характеристик [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Bland D. R., In: Recent Progress in Applied Mechanics, The Folke Odquist Vol., Stockholm, 1967, p. 91.
2. Chou P. C., Koening H. A., J. Appl. Mech., 33, 159 (1966).
3. Кяэрди Х. Х., Поверус Л. Ю., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, № 321, 25 (1972).
4. Нигул У. К., Энгельбрехт Ю. К., Нелинейные и линейные переходные волновые процессы деформации термоупругих и упругих тел, Таллин, 1972.
5. Eringen A. C., Nonlinear Theory of Continuous Media, N. Y., 1962.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
4/V 1973