EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 22. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1973, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 22
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1973, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1973.4.11

УДК 531.38

И. КЕЙС

О ПРОДОЛЖАЕМОСТИ И ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В работе доказан ряд теорем о неограниченной продолжаемости и устойчивости по Лагранжу всех или части решений некоторых конечномерных динамических систем. Полученные условия являются достаточными и определяются либо свойствами общего (частного) инварианта рассматриваемой системы, либо характером решений дифференциального неравенства, соответствующего динамической системе. Результаты иллюстрируются на примерах систем Гамильтона, Релея и конечномерных гиростатических систем, причем для исследования последних используется полученное в работе обобщение инварианта Якоби.

I. Постановка и метод решения. Рассмотрим конечномерную динамическую систему

$$\dot{x}=X(t,x), \qquad x\in R^n \tag{1}$$

где вектор-функция X определена и конечна в каждой точке $p\in D: t\geqslant 0$, $\|x\|<\infty$ и такова, что через $p^0\in D$ проходит хотя бы одна интегральная линия $x=\varphi(t,p^0)$ — решение Коши, иначе говоря, для всякого $t^0\geqslant 0$, $\|x^0\|<\infty$ найдутся $\tau(p^0)$ и $\varphi(t,p^0)$ такие, что $\varphi(t^0,p^0)\equiv x^0$, $\dot{\varphi}=X(t,\varphi(t))$; $t,\varphi(t)\in D$ для всех $0<\tau(p^0)>t-t^0$. Предположим, что функция $H(t,x)$ конечна на множестве $M\subseteq D$ и непрерывна «вдоль решений» системы (1), т. е. $S[t]=H[t,\varphi(t,p^0)]$ непрерывна по t для всех $t\geqslant 0$, $p^0\in M$. Примем, что $H(t,x)$ имеет непрерывную производную dS/dt вдоль решений, равную $\lim\limits_{\tau\to 0}\tau^{-1}\{-H(p^0)+H[t^0+\tau,\ \varphi(t^0+\tau,p^0]\}$, причем на M конечна функция $G=(\partial H/\partial t,\ \partial H/\partial x)'$, т. е. $\|G\|\leqslant N(p^0)<\infty$, $p^0\in D$. Преобразуя выражение в фигурной скобке к виду $H[t^0+\tau,\bar{\varphi}]-H[t^0+\tau,\ x^0+\tau X^0]+H[t^0+\tau,\ x^0+\tau X^0]-H(p^0)$ $(X^0=X(p^0)$, $\bar{\varphi}=\varphi(t^0+\tau,p^0))$ и применяя формулу Лагранжа по каждому аргументу для первой разности, получаем оценку

$$|H[t^0+\tau,\bar{\varphi}]-H[t^0+\tau,x^0+\tau X^0]|\leqslant N|\tau|\sum_{k=1}^{n}|\bar{\varphi}_k-\overset{0}{x}_k-\tau\overset{0}{X}_k|+|\tau\cdot o(\tau)|.$$

Из нее следует, что на M верна формула

$$dS/dt=\lim_{\tau\to 0}\tau^{-1}[H(p^0+\tau\bar{V}^0)-H(p^0)]=\langle\bar{V}^0,\nabla H\rangle, \tag{2}$$

где $\bar{V}^0=(1,X^0)'$, $\nabla H=G^0=(\partial H/\partial t^0,\ \partial H/\partial x^0)'$ и скалярное произведение в (2) непрерывно [1].

Теорема 1. *Пусть $H(t,x)$ конечна и непрерывна в D вдоль решений (1) и является в той же области общим инвариантом системы. Если $|H(t,x)|\to\infty$ при $\|x\|\to\infty$ равномерно по t из любого λ-полуинтервала $[t^0,T): 0\leqslant t^0<T<+\infty$, то все решения системы* (1) *с граничными условиями $p^0\in D$ неограниченно продолжаемы.*

Доказательство проведем методом от противного. Если найдутся p^0, T такие, что $\|\varphi(t, p^0)\| \to \infty$ при $t \to T$ $(t^0 \leqslant t < T)$, то для любого $N > 0$ найдется $\varepsilon(N)$ такое, что для $t \in [T - \varepsilon(N), T)$ выполняется неравенство $\|\varphi(t, p^0)\| \geqslant N$. Рассмотрим непрерывную функцию $S[t] = H(t, \varphi(t, p^0))$ при $t \in [T - \varepsilon(r^0), T)$, где $r^0 \geqslant N$ — число, для которого ввиду условия равномерности при $\|x\| \geqslant r^0 = r^0[A|\lambda]$ справедливы неравенства $|H(t, x)| > A > |H(p^0)|$. Но это противоречит определению инварианта, ибо $H(t, x) = H(p^0)$. Теорема доказана.

Следствие. Если $\inf\limits_{0 \leqslant t < \infty} |H(t, x)| \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$, то все решения системы (1) неограниченно продолжаемы в D.

Заметим, что условие $|H(t, x)| \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$ для всех $t \geqslant 0$ является необходимым для продолжаемости всех решений с $p^0 \in D$. Рассмотрим, например, систему, для которой оно выполнено при всех $t \geqslant 0$, $t \neq T$: $(T - t)\,dx = x\,dt$ и которая имеет инвариант $H = x(T - t)$, определенный даже в единственной особой (седловой) точке. Ясно, что все решения этой системы с граничными условиями вне оси $x^0 \equiv 0$ и слева от оси $t^0 \equiv T$ имеют конечное время определения, причем условие $|H(t, x)| \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$ выполняется всюду в D, кроме точки $t = T$, где $H \equiv 0$. Этот пример обнаруживает также, что условие $\|X(t, x^0)\| \underset{x}{\neq} 0$ не является необходимым для существования гладкого общего инварианта в окрестности x^0, чем пользуются при исследовании устойчивости движения методом связки инвариантов Н. Г. Четаева.

Рассмотрим условие продолжаемости переменных y системы

$$\dot{y} = Y(t, y, z), \qquad \dot{z} = Z(t, y, z), \tag{3}$$

которая имеет свойства системы (1) в области $D'\colon t \geqslant 0 \times \{z\} \times \Omega'$, где Ω' — дополнение ограниченного множества $y \in \Omega$, и обладает в D' непрерывным общим инвариантом $U(t, y, z)$.

Теорема 2. *Пусть для всяких $t, y \in D'$ найдется непрерывная функция $W(t, y)$ такая, что $|V(t, y)| = |U(t, y, w(t, y))| \leqslant |U(t, y, z)|$ на $z \in D'$, причем $|V(t, y)| \to \infty$ при $\|y\| \to \infty$ равномерно для любого конечного по t λ-полуинтервала $[t^0, T)$. Тогда решения $y[t, y^0, z^0]$ неограниченно продолжаемы.*

Доказательство. Предположив противное, рассмотрим решение $y^*(t, y^0, z^0)$ с конечным временем определения $T - t^0$, для которого величина $\|y^*(t)\| \to \infty$ при $t \to T$. Поскольку $\operatorname{diam} \Omega \leqslant N < \infty$, то найдется t^1 такое, что $x^*(t) \in D'$ при $t^1 \leqslant t < T$. В силу условия равномерности выберем r^0 так, чтобы $|V(t, y)| > |U[t^1, y^*(t^1), z^*(t^1)]|$ при $\|y\| \geqslant r^0$ и $t^1 \leqslant t < T$. По свойству $y^*(t)$ найдется $t^{(2)} > t^1$ такое, что $\|y^*(t)\| \geqslant r^0$ для всех $t^{(2)} \leqslant t < T$. Но тогда $|V(t^{(2)}, y^*(t^{(2)}))| = |U(t^{(2)}, y^*(t^2), W(t^{(2)}, y^*(t^{(2)}))| > |U(t^{(1)}, y^*(t^1), z^*(t^{(1)})| = |U(t^{(2)}, y^*(t^{(2)}), z^*(t^2)|$ в силу определения инварианта, что противоречит свойству функции W. Теорема доказана.

Следствие 1. Если $\{z\}$ ограничено и замкнуто в $R^m (n > m = \dim z)$, то для всех $t, y \in D$ найдется $W^*(t, y)$ такая, что верны соотношения $|V^*(t, y)| = |U(t, y, w^*)| = \min\limits_{z} |U(t, y, z)| \leqslant |U(t, y, z)|$. Если $V^*(t, y)$ удовлетворяет условиям теоремы 2, то решения системы (3) неограниченно продолжаемы.

Следствие 2. Пусть $|U(t, y, z)|$ как функция от z ограничена снизу для всех $t, y \in D'$, кроме того, $|\inf\limits_{z} U(t, y, z)| \to \infty$ при $\|y\| \to \infty$ равномерно на любом λ-интервале, тогда решения $y(t)$ неограниченно продолжаемы.

Теорема 3. Пусть $P(t,x)=0$ — частный инвариант системы (1) на пересечении $D''=D\cap\omega:P(p^*)=0$, причем P непрерывна вдоль решений в D'', а $P(t,x(t,p^*))=P(p^*)$ для всех $t\geqslant 0$, $x(t)\in D$, $p^*\in D''$ по *определению. Тогда, если в D определима (конечная) функция $T(x)$ такая, что $P(T(x),x)=0$, то достаточные условия продолжаемости решений системы* (1) *выражаются утверждениями: если* $\|x\|\to\infty$, *то* $|T(x)|\to\infty$.

Доказательство. Рассмотрим множество $\{x^*\}$. Возможно одно из двух: ∞ — предельная точка $\{x^*\}$, ∞ — не является таковой. В первом случае найдется s-последовательность $\|x^*_{ns}\|\to\infty$, $n\to\infty$. Рассмотрим соответствующую ей последовательность $|t^*_{ns}|$ при $n\to\infty$. Если $\inf[\underline{\lim}|t^*_{ns}|]=\infty$, то решения с начальными условиями p^* неограниченно продолжаемы. Во втором случае все решения неограниченно продолжаемы, так как $\|x[t,p^*]\|\not\to\infty$ для $p^*(p^*\in D'')$. Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть $H(t,x)$ — общий инвариант системы* (1), *определенный на $D':t\geqslant 0$, $x\in\Omega'$ (Ω' — дополнение ограниченного множества Ω) и непрерывный вдоль решений в D'. Если $|H(t,x)|\to\infty$ при $\|x\|\to\infty$ равномерно на $t\geqslant 0$, то все решения системы* (1) *ограничены.*

Доказательство. На основании теоремы 3 решения неограниченно продолжаемы. Предположим противное: $\|x(t,p^0)\|$ — неограниченная функция t; тогда найдется последовательность $t_n\to+\infty$, на которой $\|x(t_n,p^0)\|\to\infty$. Рассмотрим функцию $S[t]=|H(t,x(t,p^0))|$ на t_n. С одной стороны, $S[t_n]=H(p^0)=S^0$, с другой, согласно условиям теоремы 4 $S[t_n]\to\infty$ при $t_n\to\infty$, что приводит к противоречию. Теорема доказана.

Замечание. Если траектории (1) входят в Ω, покидая D', то эти куски неограниченной траектории не нарушают доказательства от противного.

Следствие. Если в D' выполняется условие $h(x)=\inf\limits_{t\geqslant 0}|H(t,x)|\to\infty$ при $\|x\|\to\infty$, то все решения ограничены, когда h непрерывна.

Теорема 5. *Пусть $P(t,x)=0$ — частный инвариант системы, определенный в $D^*=M_0\times M_1$, где $M_0:t\geqslant 0$, $M_1=\{x\}|M$, $\operatorname{diam}M=K$, $K<\infty$. Предположим, что $S(t,p_0^*)=P(\varphi(t,t_0^*),\varphi(t,p_0^*))$ непрерывна по t для $p_0^*\in C=D\cap Q:P(p^*)=0$, где множество Q неограничено по x^*. Если $|P(t,x^*)|\to\infty$ при $\|x^*\|\to\infty$, $x^*\in C$, $t\geqslant 0$ равномерно на λ-интервале, то решения $x(t,p^*)$ неограниченно продолжаемы, а если при $\|x^*\|\to\infty$ $|P(t,x^*)|\to\infty$ равномерно на $t\geqslant 0$, то решения системы* (1) *ограничены.*

Доказательство. Пусть существует решение $x^*(t,p^*)$ с конечным временем определения $T-t^0$. В силу λ-равномерности существует $r^0(N|\lambda)$ такое, что $|P(t,x)|\geqslant N$ для всех $t\in[t^0,T)$, если $\|x\|>r^0\geqslant K$. Выберем t^1 для $x^*(t)$ так, чтобы $\|x^*(t,p_0^*)\|>r^0$ для всех t из интервала $[t^1,T)$, а $N>P(t_0^*,x_0^*)$. Это приводит к противоречию: $S(t,p_0^*)>$ $>|P(p_0^*)|=S(t,p_0^*)=0$, так как $S[t]$ — непрерывная.

Если предполагать ограниченность Q по x, то получаем как устойчивость по Лагранжу всех решений, стартующих из $p^*\in Q$, так и неограниченную их продолжаемость. Покажем, что все решения из C устойчивы по Лагранжу при выполнении условий теоремы 5. Допустим противное. Поскольку при $\|x\|\to\infty$ $|P(t,x)|\to\infty$, то для любых $E>0$, $t\geqslant 0$ найдется $R(E,t)\leqslant\|x^*\|$, для которого $|P(t,x^*)|>E$. Пусть найдется E^0 такое, что $\sup\limits_{t\geqslant 0}R(E^0,t)\leqslant K<\infty$ (такое E^0 обязательно существует при условиях теоремы 5). Для неограниченного решения найдется момент t^1, при котором $\|x^*(t^1,p_0^*)\|>K$ и, следовательно, $|P(t^1,x^*(t^1,p_0^*))|>E^0>0$, где $x^*(t^1, p_0^*) \in C$, что противоречит определению частного инварианта. Значит все решения системы (1) с начальными условиями из C устойчивы по Лагранжу. Теорема доказана.

Заметим, что аналогичным образом доказывается Лагранжева устойчивость в случае общего инварианта для решений с началом на множестве $H(t, x) = h$, где параметр h таков, что существует $\sup\limits_{t\geqslant 0} R(h+\varepsilon, t) \leqslant K < \infty$, $\varepsilon > 0$.

Подчеркнем, что условие $\sup\limits_{t\geqslant 0} R(E, t) \leqslant K < \infty$ «слабее» условия равномерности по $t \geqslant 0$: $|F(t, x)| \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$, причем в случае частного инварианта в доказательстве используется только «параметрическая» равномерность — существование параметра $E^0 > 0$.

Отметим, что если $\varphi(t, x^0)$ — решение одномерной системы (1) имеет конечное время определения $T - t^0$, то найдется последовательность $t_k \to T$ такая, что $|\dot{\varphi}(t_k, x^0)| \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$; функция $\dot{\varphi}(t, x^0)$ определена при $t \in [t^0, T)$. Допустим, что она ограничена на этом полуинтервале, т. е. $|\dot{\varphi}(t, x^0)| \leqslant E^0 < \infty$. Рассмотрим любую последовательность $t_n \to T$ и величину $|\varphi(t_{n+m}) - \varphi(t_n)| = \psi_{nm}$. По формуле Лагранжа имеем оценку $\psi_{nm} \leqslant E^0(t_{n+m} - t_n)$. Поскольку $\lim(t_{n+m} - t_n) = 0$; $n, m \to \infty$, то заключаем, что $\varphi(t_n)$ — фундаментальная последовательность в полном пространстве R^1, сходящаяся к $\varphi^* < \infty$. Последнее противоречит тому, что $\lim\limits_{t\to T} |\varphi(t, x^0)| = \infty$. Обратное неверно, т. е. может оказаться, что при $t \to T$ $|\dot{\varphi}| \to \infty$, но решение сходится: $\varphi(t, x^0) \to \varphi^*$ при $t \to T$. Для решения n-мерной системы (1) с конечным временем определения найдется последовательность $t_n \to T$, на которой $\|\dot{\varphi}(t_n, x^0)\| \to \infty$.

Рассмотрим лагранжеву устойчивость по части переменных при использовании свойств [2] дифференциальных неравенств.

Теорема 6. *Пусть $V(t, y, z)$ определена вместе с $\partial V/\partial p$ $(p = (t, x)')$ на $M = M_0 \times N_1 \times N_2$ и непрерывно дифференцируема вдоль каждого решения $x(t, p^0)$, которое существует для всякого $p^0 \in M$, где M_0: $t \geqslant 0$, $N_2: \{z\}$, $N_1 = \{y\} | N_0$, $\operatorname{diam} N_0 = n_0 < \infty$.☆ Тогда в силу уравнений* (3) *и формулы* (2) *непрерывная вдоль решений в M функция V имеет производную $U(t, x)$. Если свойства системы* (3) *на M такие, что*

$$\dot{V} = U(t, x) \leqslant G(t, V) \tag{4}$$

и нет ни одного неограниченного решения у дифференциального неравенства

$$\dot{v} \leqslant G(t, v), \tag{5}$$

причем

$$|V(t, y, z)| \to \infty \text{ при } \|y\| \to \infty \text{ равномерно на } M_0 \times N_2, \tag{6}$$

то система устойчива по части переменных y в смысле Лагранжа.

Доказательство. Предположим противное: для любого $E_k > E_{k-1} > 0$ найдется $t_k[R_k(E_k)]$, где $R_k > n_0$ такое, что $\|y(t_k, p^0)\| > R_k(E_k)$, на котором выполняется неравенство $|V(t_k, y(t_k, p^0), z(t_k, p^0)| > E_k$. Поэтому $|V(t_k, y_k(t_k, p^0), z(t_k, p^0)| \to \infty$ при $t_k(E_k) \to \infty$. Тогда $v[t] = V(t, y(t, p^0), z(t, p^0))$ — неограниченное решение неравенства (5), которого по условию не существует.

☆ Здесь и всюду далее принято, что либо решения z-продолжаемы, либо все функции заданы в $z = \infty$.

В доказательстве используется следующий постулат «гладкого продолжения» вдоль решений системы (3): предполагается, что на множестве $M^0 = M_0 \times N_1 \times \bar{N}_0$ определима непрерывно дифференцируемая вдоль решений (3) в M^0 функция $V_0(t,x)$ и ее производная $\dot{V}_0(t,x)$, значения которых совпадают со значениями $V(t,x)$, $U(t,x)$ для всех точек границы M.

Потребовав в (5) отсутствие решений с конечным временем определения, а в (6) равномерность по $M_0^* \times N_2$, где M_0^* — любой конечный отрезок в M_0, получим достаточные условия продолжаемости решений $y(t,p)$.

В качестве примера теоремы 6 рассмотрим обобщение теорем [3] о продолжаемости решений в пространстве R^n.

Теорема 7. *Пусть в области* $D: t \geqslant 0$, $\|x\| < \infty$, $x = (y, z)'$, $\dim y = m \leqslant n$

1) *вектор-функция* Y *системы* (3) *удовлетворяет условию*

$$\|Y\| \leqslant R \cdot W, \tag{7}$$

где $R = R(t,z) \geqslant 0$, $0 < W = W(r)$, $r = \|y\|$ *скалярные функции*,

2) *функционал*

$$I(r, r^0) = \int_{r^0}^{r} W^{-1}(\xi)\, d\xi \tag{8}$$

существует при $r > r^0 \geqslant 0$,

3) *причем*

$$I(r, r^0) \to \infty \quad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{9}$$

4) *функционалы*

$$\Phi[t, t^0 \,|\, \hat{z}] = \int_{t^0}^{t} R(\xi, \hat{z}(\xi, p^0))\, d\xi \tag{10}$$

конечны для $t > t^0 \geqslant 0$ *при всех решениях* $\hat{z}(t, p^0)$ *системы* (3), *неограниченно продолжаемых по предположению* (*это условие выполнено для функции* $R(t,z)$, *непрерывной вдоль решений* $\hat{z} \in D$).

Тогда решения $\hat{y}(t, p^0)$ *продолжаемы в* D *и устойчивы по Лагранжу, если* $\Phi[\infty, t^0 | \hat{z}]$ *конечны.*

Доказательство. В силу условия (7) имеем оценку

$$-R(t,z)\, W(r) \leqslant \dot{r} \leqslant R(t,z)\, W(r), \tag{11}$$

откуда следует неравенство

$$I(r, r^0) = \int_{r^0}^{r} W^{-1}(\xi)\, d\xi \leqslant \Phi[t, t^0 \,|\, \hat{z}] = \int_{t^0}^{t} R(\xi, \hat{z}(\xi, p^0))\, d\xi. \tag{12}$$

Условие $r(t) \to \infty$ при $t \to T < \infty$ противоречит неравенству (12), где W и R удовлетворяют условиям (8)—(10). Если же $\Phi[\infty, t^0 | \hat{z}]$ конечны, то $\|\hat{y}(t, p^0)\|$ в силу (8), (9) и (11) ограничены при $t \geqslant 0$. Отметим, что если $r(t)$ остается ограниченным, то это равнозначно лагранжевой устойчивости y в D, а неограниченная продолжаемость дается условиями работы [3].

Теорема 7 — следствие теоремы 6. В ней $N_0 = \varnothing$, $V(t,y,z) = \|y\| = r$, поэтому условие (6) выполнено, а условия (4), (5) выполнены в силу условий (8)—(10) и неравенств (11), (12).

Подчеркнем, что в теоремах 1—6 нет требований положительной определенности, обычной гладкости функций H, P, V и единственности решений на множестве их определения. Модифицируя аналогично [2] условия этих теорем, в частности заменяя условие (5) на $\dot{v} \geqslant G(t, v)$. возможно получить достаточные условия непродолжаемости и неограниченности. В качестве объекта применения теоремы 6 может служить, например, система Релея (гамильтонова при $R \equiv 0$), заданная уравнениями

$$\dot{y}_i = -\partial H / \partial z_i - \partial R^0 / \partial \dot{z}_i, \qquad \dot{z}_i = \partial H / \partial y_i \qquad (i, j, k = \overline{1, n}), \tag{13}$$

где $H = T^0 + h_k(t, z) y_k + \hat{V}(t, z)$; $T^0 = 0{,}5 h_{ij}(t, z) y_i y_j > 0, \quad y \neq 0,$

$R^0 = 0{,}5 r_{ij}(t, z) \dot{z}_i \dot{z}_j \geqslant 0, \qquad \hat{R} = R^0(\dot{x}(y)) = 0{,}5 \hat{r}_{ij}(t, z) y_i y_j + \hat{r}_k(t, z) y_k.$

Теорема 8. *Пусть заданы уравнения* (13) *и найдется* $r_0 \geqslant 0$ *такое, что на* $M : \|z\| \geqslant r_0$ *выполняется условие*

$$\alpha^2 \hat{V}(t, z) - \langle h, h \rangle \geqslant W(z) \geqslant 0 \quad (h = (h_1, \ldots, h_n)') \quad \text{при} \quad \|z\| \to \infty, \quad W \to \infty, \tag{14}$$

где в силу $T^0 > 0 : T^0 = \lambda_1 \eta_1^2 + \ldots + \lambda_n \eta_n^2, \quad 0 < \alpha^2 = \mathrm{const} \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \ldots$ $\ldots \leqslant \lambda_n$ *и пусть существуют непрерывные* $k(\tau) > 0$, $u(t) = \exp \{\int_0^t k(\tau) d\tau\}$ *такие, что для* H *на* M *имеем оценку*

$$H(t, y, z) \leqslant u(t) [H(0, y, z) + 2 \int_0^t \hat{R}(\tau, y, z) u^{-1}(\tau) d\tau]. \tag{15}$$

Интеграл $\int_0^\infty k(\tau) d\tau$ *конечен.* (16)

Тогда условия (14)—(16) *достаточны для лагранжевой устойчивости всех решений системы* (13) *для* $t \geqslant 0$, *а условия* (14), (15) — *для их продолжаемости на бесконечный интервал.*

Проверим выполнение условий теоремы 6, избрав в качестве V функцию H. Поскольку $H \geqslant \alpha^2 \|y\|^2 + \hat{V} - \alpha^{-2} \langle h, h \rangle$, то условие (6) выполнено. В силу системы (13) и ее свойства (15) на M справедливо неравенство

$$\dot{H} = \partial H / \partial t - 2 \hat{R} \leqslant k(t) H,$$

которое не имеет ни одного неограниченного решения ввиду условия (16), так что условия (4) и (5) теоремы 6 также выполняются. Отсюда следует утверждение теоремы 8.

Рассмотрим ограниченность и продолжаемость решения $y(t)$ системы (13).

Теорема 9. *Пусть на множестве* $M : t \geqslant 0$, $\|z\| < \infty$ *выполняются условия* (15), (16) *и существует* N^2 *такое, что*

$$\alpha^2 \hat{V}(t, z) - \langle h, h \rangle \geqslant -N^2. \tag{17}$$

Тогда при выполнении условий (15), (16) *и* (17) *имеем лагранжеву устойчивость решений* $y(t)$, *а при условиях* (15) *и* (17) — *продолжаемость этих решений.*

Доказательство. В силу условия (17) из оценки $H \geqslant \alpha^2 \|y\|^2 - N^2$ следует, что найдется $r_1 \geqslant r_0$ такое, что $H(t, y, z) \to \infty$ при $\|y\| \to \infty$ равномерно по t, z для $\|y\| \geqslant r_1$, т. е. условие (6) теоремы 6 выполнено. Аналогично предыдущему проверяется выполнение условий (4), (5), что и доказывает теорему.

Менее наглядной, но более общей оказывается следующая приводимая без доказательства

Теорема 10. *Пусть* $|H(t,y,z)|\to\infty$ *равномерно по* $t\geqslant 0$ *при* $x^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i^2+z_i^2)\to\infty$ *и справедлива оценка* $|\partial H/\partial t-2\hat{R}|\leqslant L(H)k(t)$ *для всех* t, x; $x=(y,z)'$, *причем непрерывные функции* $L(H)>0$, $k(t)>0$. *Существуют интегралы* $\int_0^\infty k(\tau)\,d\tau$, $I(H,H^0)=\int_{H_0}^{H}L^{-1}(u)\,du$ *для всех* $H, H^0, t^0\geqslant 0$, *причем* $|I(H,H^0)|\to\infty$ *при* $H\to\infty$.

Тогда имеем лагранжеву устойчивость решений системы Релея (13).

II. Пример. Рассмотрим вопрос ограниченности и продолжаемости движений потенциальной p-мерной гиростатической системы (г. с.) S_1 в нецентральном ньютоновском поле сил системы S_2, вращающейся относительно оси динамической симметрии. К рассматриваемому типу г. с. принадлежат оболочки, содержащие маховики и обладающие потенциалом N Майера для сил внутреннего взаимодействия.

Лагранжиан системы S_1 определяется [4] равенством

$$L=T_2(G)+\langle\Omega,k\rangle+T(g)+\frac{M_1|\dot r|^2}{2}+N+U, \tag{18}$$

где

$$T_2(G)=\frac{G_\alpha\Omega_\alpha^2}{2},\qquad k_\alpha=k_{\alpha j}(q)\,q'_j+l_\alpha(t,q),$$

$$T(g)=\frac{s_{jk}}{2}\,q'_jq'_k+s_jq'_j+T_0(t,q),$$

$$N=n_\alpha(t,x_i,\varphi_\alpha,q)\,\Omega_\alpha+m_j(t,x_i,\varphi_\alpha,q)\,q'_j+N_0(t,\varphi_\alpha,q);\quad \alpha,i=\overline{1,3};\quad j,k=\overline{1,m}, \tag{19}$$

$$U=U(x_i,\varphi_\alpha),\quad s_{jk}=s_{jk}(q),\quad [s_{jk}]>0,\quad s_j=s_j(t,q);\quad \frac{\partial(T_0+N_0)}{\partial t}\equiv 0,$$

x_i — координаты центра масс r г. с. S_1; φ_α — углы Эйлера ψ, φ, θ, q — вектор из координат подвижных частей S_1 относительно оболочки S_1, U — силовая функция взаимодействия S_1 и S_2, $q'=dq/dt$. Асимптотическое разложение функции U до членов порядка $o(|r|^{-3})$ получим интеграцией при $A=B$ из исправленной здесь формулы (3.22) работы [5]

$$dU=\frac{\mu\,dm}{|r|}\left\{1+\frac{\langle r,r_c\rangle}{|r|^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(B+C-2A)\,x_1'^2+(A+C-2B)\,x_2'^2+(A+B-2C)\,x_3'^2}{2M_2|r|^4}\right\} \tag{20}$$

в виде выражения

$$U=\frac{\mu M_1}{|r|}\left[1+\frac{(C-A)(1-3s^2)}{2M_2|r|^2}\right]-\frac{3\mu}{2|r|^3}\left\{\langle\sigma,G\sigma\rangle-\frac{2}{3}G_0+\right.$$

$$+\frac{(C-A)}{M_2|r|^2}\left[\frac{1}{8}(G_0-5\langle\sigma,G\sigma\rangle)+\langle\gamma,G\gamma\rangle-G_0-5s\langle\gamma,G\sigma\rangle+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{35s^2}{8}\left(\langle\sigma,G\sigma\rangle+\frac{5G_0}{7}\right)\right]\right\}.$$

Здесь приняты следующие обозначения: r_c — радиус-вектор центра масс S_2 (здесь $r_c=0$), M_1 — масса S_1, M_2 — масса S_2, $\mu=fM_2$, f — постоянная Гаусса, $2G_0=G_1+G_2+G_3$, $s=\langle\gamma,\sigma\rangle$, $r=(x_1,x_2,x_3)'=|r|\sigma$, γ — направляющий вектор оси симметрии S_2; σ_i, γ_i — проекции векторов σ, γ на главный триэдр S_1. Предположив линейную зависимость плотности Земли ϱ от расстояния до ее центра при $\varrho(0)/\varrho(R)=5$, где R — радиус Земли, приходим к зависимости

$$C(R)=MR^2[0{,}5-(10-3\pi/2)^{-1}]\simeq 0{,}3MR^2. \tag{21}$$

Из (21) и равенства $(C-A)/C=0{,}00327237$ следует оценка

$$\varepsilon=(C-A)/MR^2=(C-A)/C\cdot C(R)/MR^2\simeq 1\cdot 10^{-3}, \tag{22}$$

обнаруживающая слабую нелинейность $\varrho(\xi)$ относительно $C(R)$, ибо, согласно геофизическим данным [6], $\varepsilon=106\cdot 10^{-5}$. Ввиду оценок $\sqrt{10}\geqslant r/R\geqslant 1$ и (22) ограничимся для U вместо выражения (20) асимптотикой $U^*(|r|,\sigma,\gamma)$ вида

$$U^*=\frac{\mu M_1}{|r|}\left[1+\frac{(C-A)(1-3s^2)}{2M_2|r|^2}\right]-\frac{3\mu}{2|r|^3}\left[\langle\sigma,G\sigma\rangle-\frac{2}{3}G_0\right]. \tag{23}$$

Пусть центр масс S_1 движется с постоянной частотой $n\simeq\sqrt{\mu/r_0^3}$ по окружности $r=r_0$, лежащей в плоскости с направляющим вектором β, который составляет с γ постоянный угол i. Тогда для гамильтониана H^* вращательного движения S_1 с учетом формул (18), (19), (23) следует уравнение

$$dH^*/dt=-\partial U^*/\partial t,$$
$$H^*=T_2(G)+k_{\alpha j}\Omega_\alpha q'_j+\frac{s_{jk}}{2}q'_jq'_k-T_0-N_0-U^*. \tag{24}$$

В силу предположения $\dot\sigma=n[\beta,\sigma]$ справедливо равенство

$$\partial U^*/\partial t=n\langle\nabla_\sigma U^*,[\beta,\sigma]\rangle. \tag{25}$$

С другой стороны, по теореме о моменте количества движения $K=-G\circ\Omega+k$ имеем уравнение

$$d\langle K,\beta\rangle/dt=\langle\beta,[\nabla_\sigma U^*,\sigma]+[\nabla_\gamma U^*,\gamma]\rangle. \tag{26}$$

Используя формулы (24)—(26), получаем для рассматриваемых г. с. обобщенный инвариант Якоби, содержащий постоянные u^0, v^0,

$$V=H^*-n\langle K,\beta\rangle+\frac{3M_1(C-A)n^2\sin^2 i}{4M_2}\cos 2[n(t-t^0)+u^0]=v^0. \tag{27}$$

Поскольку

$$V\geqslant T_2(G)+k_{\alpha j}\Omega_\alpha q'_j+\frac{1}{2}s_{jk}q'_jq'_k-\frac{3M_1(C-A)n^2\sin^2 i}{4M_2}-$$
$$-\frac{\mu}{|r|}\left(M_1+\frac{G_0}{|r|^2}\right)-n[\|G\circ\Omega\|+\|d\|]-[T_0+N_0+n\|l\|],$$

где $d=(k_{1j}q'_j, k_{2j}q'_j, k_{3j}q'_j)'$, $l=(l_1(t,q), l_2(t,q), l_3(t,q))'$, то на основании теоремы 6 заключаем, что все г. с., для которых функция $T_0+N_0+n\|l\|\leqslant E<\infty$, а квадратичная форма $T_2(G)+0{,}5s_{jk}q'_jq'_k+$ $+k_{\alpha j}\Omega_\alpha q'_j$ оказывается знакоопределенной, обладают ограниченными и продолжаемыми на бесконечность решениями $\dot\varphi_\alpha(t), q'_j(t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Apostol T. M., Mathematical analysis, Mass. Addison-Wesley, 1960, pp. 51—65.
2. Ла-Салль Ж., Левшец С., Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова, М., 1964, с 130—140.
3. Барбашин Е. А., Введение в теорию устойчивости, М., 1967, с. 147—150.
4. Кейс И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, № 4 (1971).
5. Демин В. Г., Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения, М., 1968, с. 99.
6. Белецкий В. В., Очерки о движении космических тел, М., 1972, с. 23.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
4/IV 1973

I. KEIS

DÜNAAMILISTE SÜSTEEMIDE LAHENDITE JÄTKAMISEST JA TÕKESTATUSEST

Artiklis tõestatakse rida teoreeme mõnede lõplikmõõtmeliste dünaamiliste süsteemide kõikide või osa lahendite tõkestamata jätkuvuse ja stabiilsuse kohta Lagrange'i mõttes. Saadud tingimused osutuvad piisavateks ja määratakse kas üldise (osalise) invariandi omadustega või süsteemide vastava diferentsiaalvõrratuse lahendite iseloomuga. Tulemuste illustreerimiseks on toodud näiteid Hamiltoni, Rayleigh ja lõplikmõõtmelistest gürostaatilistest süsteemidest, kusjuures viimaste korral kasutatakse Jacobi invariandi üldistust, mis saadi käesolevas uurimuses.

I. KEIS

ON DEFINED IN THE FUTURE AND BOUNDED SOLUTIONS OF DYNAMICAL SYSTEMS

The paper contains theorems on defined in the future and bounded solutions of the dynamical systems concerning total or partial phase vector-function. The obtained conditions are sufficient and are determined by the properties of general (partial) invariant or by the type of solution of the differential inequality corresponding to the system. The results are illustrated on Hamilton, Rayleigh and some gyrostatic systems. A new modification of Jacoby invariant is used for the investigation of the latter.