LÜHIUURIMUSI * КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.4.15

УДК 518 : 517.392

М. ЛЕВИН

О ПОСТРОЕНИИ НАИЛУЧШИХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

M. LEVIN. PARIMATE KVADRATUURVALEMITE TULETAMISEST

M. LEVIN. ON THE CONSTRUCTION OF THE BEST QUADRATURE FORMULAS

Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $W^{(s)}_{L_p}$ — класс (см. [1]) функций $f(x)$, которые на отрезке $[0,1]$ имеют абсолютно непрерывную производную порядка $s-1$ и удовлетворяют условию $\|f^{(s)}(x)\|_{L_p} \leqslant M$. Пусть, далее, $Q_i f(x)$ — линейные функционалы, определенные на классе $W^{(s)}_{L_p}$, и такие, что определитель

$$\left|Q_i x^{j-1}\right|_{i,j=1,\ldots,s} \neq 0. \tag{1}$$

Через $W^{(s)}_{QL_p}$ обозначим класс функций $f(x)$, которые принадлежат классу $W^{(s)}_{L_p}$ и удовлетворяют дополнительному условию

$$Q_i f(x) = 0 \quad (i=1,2,\ldots,s). \tag{2}$$

Этот класс является обобщением классов $W^{(s)}_{0L_p}$ и $W^{(2s)}_{01L_p}$, рассматривавшихся, например, в работах [1,2].

В классах $W^{(s)}_{QL_p}$ и $W^{(s)}_{L_p}$ рассмотрим соответственно квадратурные формулы

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\rho_k} A_{kj} f^{(j)}(x_k) + r_n(f(x)), \tag{3}$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=0}^{\rho_k} B_{kj} f^{(j)}(u_k) + \sum_{i=1}^{s} c_i Q_i f(x) + R_n(f(x)). \tag{4}$$

Рассмотрение формул (4) объясняется, например, желанием использовать о подынтегральной функции дополнительную информацию вида (2), если она известна (например, функция $f(x)$ является решением краевой задачи с условиями (2)).

Пусть A^*_{kj}, x^*_k ($k=1,\ldots,n$; $j=0,\ldots,\rho_k$), $r^*_n(f(x))$ — веса, узлы и ошибка наилучшей [1] формулы (3) в классе $W^{(s)}_{QL_p}$, т. е. формулы (3) с наименьшим значением величины

$$\sup_{f\in W^{(s)}_{QL_p}} \left| r_n(f(x)) \right|.$$

Теорема 1. *В классе* $W^{(s)}_{L_p}$ *наилучшая формула* (4), *т. е. формула* (4) *с наименьшим значением величины*

$$\sup_{f\in W^{(s)}_{L_p}} \left| R_n(f(x)) \right|,$$

имеет узлы $u_k = \overset{*}{x}_k$, *веса* $B_{kj} = \overset{*}{A}_{kj}$ $(k=1, \ldots, n;\ j=0, \ldots, \varrho_k)$ *и веса* c_i $(i = 1, \ldots, s)$, *являющиеся решением системы*

$$\sum_{i=1}^{s} c_i Q_i x^m = \overset{*}{r}_n(x^m) \qquad (m=0, 1, \ldots, s-1). \tag{5}$$

Для этой формулы справедлива оценка ошибки

$$\sup_{f\in W^{(s)}_{L_p}} \left| R_n(f(x)) \right| = \sup_{f\in W^{(s)}_{QL_p}} \left| \overset{*}{r}_n(f(x)) \right|.$$

Доказательство. По теореме из [3] при построении наилучшей в классе $W^{(s)}_{L_p}$ формулы (4) мы вправе рассматривать только те формулы (4), для которых

$$R_n(x^m) = 0 \qquad (m=0, 1, \ldots, s-1). \tag{6}$$

Ниже будем считать, что формулы (4) удовлетворяют условиям (6).

Из (1) следует, что для каждой функции $f(x)$ из класса $W^{(s)}_{L_p}$ найдется многочлен $P_f(x)$ степени $s-1$ такой, что

$$Q_i P_f(x) = Q_i f(x) \qquad (i=1, 2, \ldots, s).$$

Функция $\varphi_f(x) = f(x) - P_f(x)$ принадлежит классу $W^{(s)}_{QL_p}$ и для нее в силу (6) справедливо равенство $R_n(\varphi_f(x)) = R_n(f(x))$. Отсюда имеем, что

$$\sup_{f\in W^{(s)}_{L_p}} \left| R_n(f(x)) \right| \leqslant \sup_{f\in W^{(s)}_{QL_p}} \left| R_n(f(x)) \right|.$$

В то же время из того, что $W^{(s)}_{QL_p} \subset W^{(s)}_{L_p}$, имеем

$$\sup_{f\in W^{(s)}_{L_p}} \left| R_n(f(x)) \right| \geqslant \sup_{f\in W^{(s)}_{QL_p}} \left| R_n(f(x)) \right|.$$

Из последних двух неравенств получаем равенство

$$\sup_{f\in W^{(s)}_{L_p}} \left| R_n(f(x)) \right| = \sup_{f\in W^{(s)}_{QL_p}} \left| R_n(f(x)) \right|. \tag{7}$$

Учитывая (2), видим, что правая часть этого равенства принимает наименьшее значение при $u_k = x_k^*$, $B_{kj} = A_{kj}^*$; значит, при этих значениях наименьшее значение примет и левая часть в (7). При этом должны быть выполнены условия (6), что равносильно выполнению равенств (5). Это и то, что

$$\min_{\{B_{kj}, u_k\}} \sup_{f \in W_{QL_p}^{(s)}} \left| R_n(f(x)) \right| = \min_{\{A_{kj}, x_k\}} \sup_{f \in W_{QL_p}^{(s)}} \left| r_n(f(x)) \right|,$$

доказывают теорему.

Таким образом, если мы построили наилучшую в классе $W_{QL_p}^{(s)}$ квадратурную формулу (3), то по доказанной теореме легко получаем наилучшую в классе $W_{L_p}^{(s)}$ квадратурную формулу (4). Идея такого перехода содержится уже в работе [1].

Пример построения наилучших формул (3) и (4) соответственно в классах $W_{QL_p}^{(s)}$ и $W_{L_p}^{(s)}$ был рассмотрен в работе [2], где было взято $s = 2r$, $\varrho_k = 2r - 2$ $(k = 1, \ldots, n)$,

$$Q_i f(x) = f^{(i)}(0), \quad Q_{r+i} f(x) = f^{(i)}(1) \qquad (i = 0, 1, \ldots, r-1).$$

Приведем еще один пример решения этой задачи.

Пусть $s = p = 2$. Рассмотрим класс $W_{QL_2}^{(2)}$, где $Q_1 f(x) = f(0)$, $Q_2 f(x) = f'(1)$. Для функций этого класса имеем представление

$$f(x) = \int_0^1 f''(t) g(x, t) \, dt,$$

где $g(x, t) = (x - t) E(x - t) - x$,

$$E(u) = \begin{cases} 0, & u \leqslant 0; \\ 1, & u > 0. \end{cases}$$

Известными рассуждениями [1, 4, 5, 2] для этого класса получим наилучшую формулу (3) при $\varrho_k = 0$ $(k = 1, \ldots, n)$*. Переходя от этой формулы к формуле (4), мы по вышедоказанной теореме приходим к следующему результату.

Теорема 2. *В классе* $W_{L_2}^{(2)}$ *единственная наилучшая формула*

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \sum_{k=1}^n B_k f(u_k) + c_1 f(0) + c_2 f'(1) + R_n(f)$$

характеризуется значениями

$$u_1 = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \cdot h,$$
$$u_k = u_1 + 2(k-1)h \qquad (k = 2, 3, \ldots, n),$$

---

* Аналогичная задача в случае $Q_1 f(x) = f(0)$, $Q_2 f(x) = f'(0)$ была решена в работе [4].

$$B_1=\left(1+\frac{5}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)h,$$

$$B_k=2h \quad (k=2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

$$c_1=\frac{3}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\,h, \qquad c_2=\frac{h^2}{6};$$

$$h=\frac{1}{2\sqrt{\frac{2}{3}}+2n-1}.$$

Для этой формулы имеет место оценка ошибки

$$\sup_{f\in W_{L_2}^{(2)}} |R_n(f)|=\frac{M}{3\sqrt{5}}h^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., УМН, **V**, вып. 2 (36), 165 (1950).
2. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 407 (1970).
3. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 90 (1971).
4. Доронин Г. Я., Сб. науч. тр. Днепропетр. инж.-стр. ин-та, № 1—2, 210 (1955).
5. Аксень М. Б., Турецкий А. Х., Изв. АН БССР, Физ. Матем., № 1, 14 (1966).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 18/IV 1972