

Л. ВАЙК, Г. РАБКИН

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГОЭКОНОМИЧЕСКОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОПЛИВНО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО БАЛАНСА РАЙОНА В УСЛОВИЯХ ДОПОЛНИТЕЛЬНОГО ОГРАНИЧЕНИЯ

### 1. Постановка задачи

В [1,2] изложен метод определения энергоэкономической характеристики (ЭЭХ) топливно-энергетического баланса (ТЭБ) района. Выражение ЭЭХ имеет вид

$$Z = a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (1)$$

где  $Z$  — суммарные приведенные затраты на ТЭБ района (руб.);  $x_i, x_j$  — количество  $i$ - и  $j$ -го топлива в ТЭБ (т у.т.);  $i, j = 1, 2, \dots, n$  — виды исследуемых топлив;  $a_0, a_i, a_{ii}, a_{ij}$  — постоянные коэффициенты.

Для определения коэффициентов в выражении (1), согласно математической теории планирования экспериментов [3], ресурсы исследуемых видов топлива необходимо варьировать на трех уровнях и провести расчеты по оптимизации ТЭБ. Общее количество экспериментальных расчетов при использовании центрального композиционного планирования составляет

$$N = 2^n + 2n + n_0, \quad (2)$$

где  $n$  — количество факторов (видов топлива);  $n_0$  — число опытов в центре планирования.

Данный метод применим в тех случаях, когда суммарное количество исследуемых эффективных видов топлива в ТЭБ района не преобладает, т. е. когда используются еще в значительном количестве как замыкающее ТЭБ топливо, так и местные виды топлива.

Если же удельный вес замыкающего и местных видов топлива небольшой, то при постановке эксперимента методом центрально-композиционного планирования некоторые точки эксперимента невозможно будет реализовать, так как суммарное количество топлива может оказаться большим, чем требуется для полного покрытия потребления.

В связи с этим возникает проблема определения ЭЭХ (т. е. коэффициентов в (1)) методами планирования эксперимента, отличными от центрально-композиционного.

Дадим математическую формулировку этой задаче. Необходимо получить в виде выражения (1) зависимость затрат на ТЭБ от количества ресурсов топлива  $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  при условии дополнительного ограничения

$$\sum_{i=1}^m \eta_i x_i = Q = \text{const}, \quad (3)$$

где  $Q$  — полезное потребление топлива (т у.т.);  $\eta_i$  — к.п.д.  $i$ -го вида топлива;  $m$  — общее число видов топлива в ТЭБ.

Выражение (3) определяет так наз. гиперплоскость потребления. Очевидно, что точки экспериментальных расчетов оптимизации ТЭБ при определении коэффициентов регрессии (1) должны находиться на гиперплоскости потребления.

Следует отметить, что замыкающий и местные виды топлива не учитываются в уравнении (1), но они обязательно входят в уравнение гиперплоскости потребления (3). Отсюда следует, что

$$n \leq m - 1, \quad (4)$$

где  $n$  — число видов топлива в выражении (1), т. е. число исследуемых эффективных видов топлива в ТЭБ;  $m$  — число видов топлива в выражении (3), т. е. число всех используемых видов топлива в ТЭБ.

Без ограничения общности будем в дальнейшем считать, что  $n = m - 1$ . Это означает, что энергоэкономическая характеристика ТЭБ построена для всех видов топлива за исключением замыкающего топлива, или все остальные виды топлива объединены в один условный замыкающий вид топлива.

## 2. Планирование эксперимента в условиях дополнительного ограничения

Нам необходимо получить экспериментальные точки на гиперплоскости потребления. Нормируя (3), получаем

$$\sum_{i=1}^{n+1} y_i = 1, \quad (5)$$

где

$$y_i = \frac{\eta_i}{Q} x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1. \quad (6)$$

Для решения этой задачи может быть использован особый случай планирования эксперимента, предложенный Х. Шеффе [4] для построения диаграмм состав—свойство. Выберем следующую математическую модель эффективности видов топлива:

$$Z = \sum_{i=1}^{n+1} b_i y_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{n+1} b_{ij} y_i y_j. \quad (7)$$

Эта модель называется неполным квадратичным приближением. Для нее можно, учитывая (5), построить эксперимент так, чтобы матрица моментов была невырожденной. Такая матрица планирования представлена в табл. 1.

Коэффициенты уравнения (7) находятся из результатов опыта методом наименьших квадратов [5]

$$b_i = Z_i, \quad i = 1, 2, \dots, n+1, \quad (8)$$

$$b_{ij} = 4Z_{ij} - 2Z_i - 2Z_j, \quad i < j. \quad (9)$$

Однако результаты применения модели (7) трудно интерпретировать (хотя бы из-за отсутствия в уравнении свободного члена). Поэтому вос-

Таблица 1

Матрица планирования для случая  $n + 1$  переменных

$y_1$	$y_2$	$y_3$	...	$y_n$	$y_{n+1}$	$y_1 y_2$	$y_1 y_3$	...	$y_1 y_{n+1}$	$y_2 y_3$	...	$y_2 y_{n+1}$	...	$y_n y_{n+1}$
1	0	0	...	0	0	0	0	...	0	0	...	0	...	0
0	1	0	...	0	0	0	0	...	0	0	...	0	...	0
0	0	1	...	0	0	0	0	...	0	0	...	0	...	0
0	0	0	...	1	0	0	0	...	0	0	...	0	...	0
0	0	0	...	0	1	0	0	...	0	0	...	0	...	0
1/2	1/2	0	...	0	0	1/4								
1/2	0	1/2	...	0	0		1/4							
1/2	0	0	...	0	1/2				1/4					
0	1/2	1/2	...	0	0					1/4				
0	1/2	0	...	0	1/2								1/4	
0	0	0	...	1/2	1/2									1/4

Недиагональные элементы равны нулю

Планирование

пользуемся тем, что в (3) входит замыкающее топливо. Пусть оно будет  $(n + 1)$ -м видом топлива. Тогда его количество определяется из выражения (3)

$$x_{n+1} = \frac{Q}{\eta_{n+1}} - \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{\eta_{n+1}} x_i. \quad (10)$$

Подставляя значение  $x_{n+1}$  в уравнение (7) и учитывая (6), получим

$$Z = b_{n+1} + \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i}{Q} (b_i - b_{n+1} + b_{i,n+1}) x_i - \sum_{i=1}^n \frac{\eta_i^2}{Q^2} b_{i,n+1} x_i^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{\eta_i \eta_j}{Q^2} [b_{ij} - (b_{i,n+1} + b_{j,n+1})] x_i x_j. \quad (11)$$

Учитывая формулы (8) и (9), введем следующие обозначения:

$$c_0 = Z_{n+1}; \quad (12)$$

$$c_i = \frac{\eta_i}{2Q} (4Z_{ij} - Z_i - 3Z_{n+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (13)$$

$$c_{ii} = \frac{2\eta_i^2}{Q^2} (Z_i + Z_{n+1} - 2Z_{i,n+1}), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (14)$$

$$c_{ij} = \frac{2\eta_i \eta_j}{Q^2} (Z_{ij} + Z_{n+1} - Z_{i,n+1} - Z_{j,n+1}), \quad i < j, \quad (15)$$

$$j = 2, 3, \dots, n.$$

Тогда выражение (11) можно представить в виде

$$Z = c_0 + 2 \sum_{i=1}^n c_i x_i + \sum_{i=1}^n c_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n c_{ij} x_i x_j, \quad (16)$$

где  $x_i$  — кодированные уровни видов топлива, равные 0; 1/2; 1.

Для перехода к значениям количества топлива в ТЭБ района заменим  $x_i$  в уравнении (16) выражением

$$\frac{x_i - x_{0i}}{2l_i}, \quad (17)$$

где  $x_{0i}$  — количество  $i$ -го вида топлива на нижнем уровне;  $x_i$  — количество  $i$ -го вида топлива на отрезке  $[x_{0i}, x_{0i} + 2l_i]$  и  $l_i$  — интервал варьирования ресурсов  $i$ -го топлива (все в  $T$  у. т.).

Получаем

$$Z = a_0 + 2 \sum_{i=1}^n a_i x_i + \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (18)$$

где  $x_i$  — количество  $i$ -го вида топлива в ТЭБ района ( $T$  у. т.);

$$a_0 = c_0 - \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{l_i} x_{0i} + \frac{1}{4} \sum_{i=1}^n \frac{c_{ii}}{l_i^2} x_{0i}^2 + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^n \frac{c_{ij}}{l_i l_j} x_{0i} x_{0j}; \quad (19)$$

$$a_i = \frac{c_i}{2l_i} - \frac{c_{ii}}{4l_i^2} x_{0i} - \frac{1}{4} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{c_{ij}}{l_i l_j} x_{0j}; \quad (20)$$

$$a_{ii} = \frac{c_{ii}}{4l_i^2}; \quad (21)$$

$$a_{ij} = \frac{c_{ij}}{4l_i l_j}. \quad (22)$$

Уравнение (18) по структуре соответствует полностью энергоэкономической характеристике ТЭБ района (1).

### 3. Выбор экспериментальных точек на гиперплоскости потребления

Рассмотрим один частный случай. Пусть  $m = 3$ . Для простоты будем считать, что гиперплоскость потребления задается уравнением

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

Уравнение (7) принимает тогда вид

$$Z = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + b_{23} x_2 x_3. \quad (23)$$

Матрица планирования для определения коэффициентов уравнения (23) дана в табл. 2.

Точки эксперимента, представленные на рис. 1, находятся на  $\Delta ABC$ , лежащем на гиперплоскости потребления  $\pi$ . Пусть  $x_3$  — замыкающий

Таблица 2

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$x_1 x_2$	$x_1 x_3$	$x_2 x_3$	$Z$
1	0	0	0	0	0	$Z_1$
0	1	0	0	0	0	$Z_2$
0	0	1	0	0	0	$Z_3$
1/2	1/2	0	1/4	0	0	$Z_{12}$
1/2	0	1/2	0	1/4	0	$Z_{13}$
0	1/2	1/2	0	0	1/4	$Z_{23}$

вид топлива. Исключая его из уравнения (23), приходим к уравнению вида (16). Исключение  $x_3$  из (17) означает проектирование  $\Delta ABC$  на плоскость  $x_1x_2$ , где мы получаем точки экспериментов на  $\Delta A'B'C'$  для

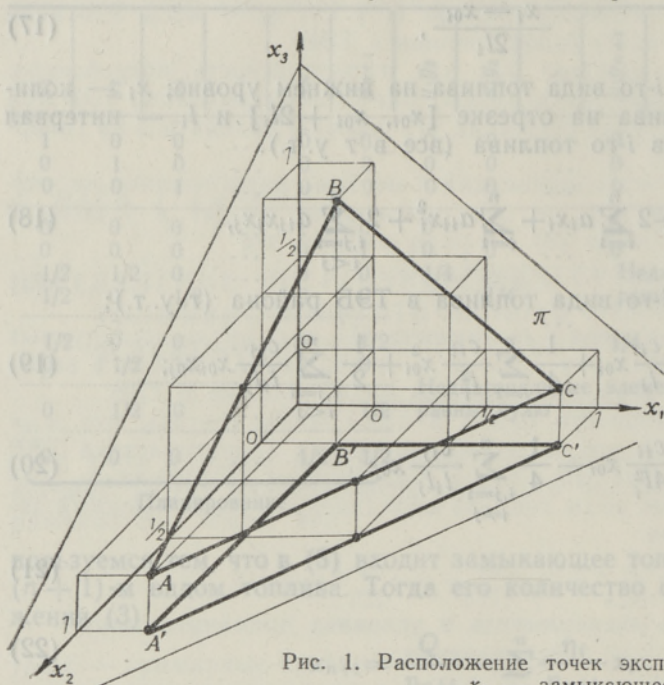


Рис. 1. Расположение точек эксперимента в случае  $m=3$ .  $x_3$  — замыкающее топливо.

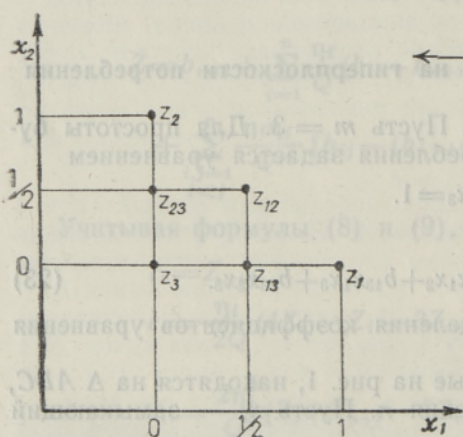


Рис. 2. Расположение точек эксперимента при  $m=3$  для определения коэффициентов регрессии в случае ограничения  $\sum_{i=1}^m x_i = 1$ .

определения коэффициентов уравнения (16). Эти точки представлены на рис. 2. Как видно из рисунка, при  $n=2$  уравнение (16) строится по 6 точкам вместо 9-ти, как в случае центрально-композиционного планирования экспериментов. Матрица планирования в этом случае представлена в табл. 3.

Таблица 3

$x_0$	$x_1$	$x_2$	$x_1^2$	$x_2^2$	$x_1x_2$	$Z$
1	1	0	1	0	0	$Z_1$
1	0	1	0	1	0	$Z_2$
1	1/2	1/2	1/4	1/4	1/4	$Z_{12}$
1	1/2	0	1/4	0	0	$Z_{13}$
1	0	1/2	0	1/4	0	$Z_{23}$
1	0	0	0	0	0	$Z_3$

Таблица 4

Матрица планирования для получения коэффициентов уравнения (16) в случае ограничения  $\sum_{i=1}^m x_i = 1$

№ опыта	$x_1$	$x_2$	$x_3$	...	$x_n$
1	1	0	0	...	0
2	0	1	0	...	0
3	0	0	1	...	0
...	...	...	...	...	...
$n$	0	0	0	...	1
$n+1$	0	0	0	...	0 — нулевая строка
$n+2$	1/2	1/2	0	...	0
$n+3$	1/2	0	1/2	...	0
...	...	...	...	...	...
$2n$	1/2	0	0	...	1/2
$2n+1$	1/2	0	0	...	0
$2n+2$	0	1/2	1/2	...	0
...	...	...	...	...	...
$3n$	0	1/2	0	...	1/2
$3n+1$	0	1/2	0	...	0
...	...	...	...	...	...
$n+1+C_n^2$	0	0	0	...	1/2 — $x_n = 1/2$ , остальные $x_i = 0$

В общем случае матрица планирования для определения коэффициентов уравнения вида (16) получается вычеркиванием столбца, соответствующего замыкающему виду топлива, из представленной в табл. 1 матрицы планирования для определения уравнения (7). Получаем матрицу, приведенную в табл. 4. При этом общее число точек эксперимента уменьшается с  $N = 2^n + 2n + 1$  при центрально-композиционном планировании до  $N = (n+1) + C_{n+1}^2$  при неполном квадратичном планировании в случае дополнительного ограничения, создаваемого постоянством полезного потребления в ТЭБ района.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вайк Л. Э., Методы определения энергоэкономической характеристики эффективности видов топлива экономических районов и оптимального распределения эффективных видов топлива между экономическими районами, Мат-лы совещ. по совместной оптимизации ТЭБ страны и отдельных эконом. р-нов, 1, Тбилиси, 1970.
2. Вайк Л. Э., Метод оптимального распределения мазута и природного газа между районами, В сб.: Проблемы развития энергетики Северо-Запада СССР, Рига, 1971.
3. Налимов В. В., Чернова Н. А., Статистические методы планирования экспериментальных экспериментов, М., 1965.
4. Scheffe H., Experiments with Mixtures, J. Roy. Statist. Soc., Ser. B, 20, No. 2, 344 (1958).
5. Линник Ю. В., Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений, М., 1962.

L. VAIK, G. RABKIN

**RAJOOINI ENERGIABILANSI ENERGOÖKONOOMILISE KARAKTERISTIKU MÄÄRAMINE LISAPIIRTINGIMUSE PUHUL**

Esitatakse rajooni energiabilansi energoökonomilise karakteristiku määramiskatsete planeerimise mittetäieliku ruutlähendi kasutamise meetod juhuks, kui maa sulgeva kütuse osa rajooni energiabilansis on väike, samuti kütuste planeerimise maatriks ja valemid energoökonomilise karakteristiku koefitsientide määramiseks.

L. VAIK, G. RABKIN

**DETERMINATION OF POWER AND ECONOMIC CHARACTERISTICS OF THE FUEL AND POWER BALANCE OF THE DISTRICT IN THE TERMS OF ADDITIONAL LIMITING CONDITION**

A method of incomplete square-law planning of experiments is given. This method permits to carry out experimental calculations of optimization of fuel and power balances (FPB) of districts to determine the power and economic characteristics (PEC) of the FPB of districts when the share of the country's closing fuel is minimal in the FPB of the district. A matrix of planning and formulas to determine the coefficients of FPB are listed.