

Л. ТЕПАКС

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ СКОРОСТЕЙ В ТРУБАХ КРУГЛОГО СЕЧЕНИЯ

Исследование турбулентного движения жидкости в трубах с гладкими стенками показало, что на стенке турбулентные возмущения отсутствуют, а касательное напряжение на стенке, как и при ламинарном движении, зависит от вязкости жидкости. Распределение скоростей вблизи стенки описывается формулой

$$\frac{u}{u_*} = \frac{yu_*}{\nu} \quad (1)$$

В условиях развитой турбулентности уже на небольшом расстоянии от стенки формула (1) недействительна. Однако в настоящее время считается установленным, что распределение осредненных по времени скоростей можно описать при помощи тех же безразмерных координат u/u_* и yu_*/ν . Для описания профиля скорости некоторые авторы получили аналитические зависимости, из которых формула (1) получается асимптотически при $yu_*/\nu \rightarrow 0$. Другие разбивают профиль скорости на отдельные участки, в пределах которых применяются разные аналитические выражения. Такой прием был в свое время использован Л. Прандтлем [1], предложившим на основе опытов И. Никурадзе [2] в гладких трубах круглого сечения логарифмический закон распределения скоростей

$$\frac{u}{u_*} = 5,5 + 5,75 \lg \frac{yu_*}{\nu} \quad (2)$$

Хотя эта формула недействительна в близкой к стенке области, влияние вязкостного трения на стенке учтено, о чем свидетельствует введение вязкости в формулу.

В настоящей работе приводится анализ опытных данных по распределению скоростей в трубах разной шероховатости. Так как распределение скоростей вблизи шероховатой стенки изучено мало, то закономерности движения в этой области не рассматриваются.

Формулой (2) охвачена большая часть сечения потока. Интегрированием ее по сечению получается формула, которая позволяет определить расход жидкости, ее среднюю скорость, а также коэффициент сопротивления. В случае сопротивления гладких труб она имеет вид

$$\frac{1}{\gamma\lambda} = 0,7 + 2 \lg \frac{ru_*}{\nu} \quad (3)$$

или, как обычно приводится в литературе,

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -0,8 + 2 \lg (\operatorname{Re} \sqrt{\lambda}). \quad (4)$$

Численные значения коэффициентов в формулах (3) и (4) взяты из опытных данных по сопротивлению труб [2]. Эти значения несколько отличаются от тех, которые получаются при интегрировании выражения (2). Такое несоответствие говорит о несовершенстве формулы (2).

Из теории гидравлических сопротивлений известно, что в условиях турбулентного движения и при малых числах Рейнольдса многие шероховатые поверхности ведут себя как гладкие и формулы (2) — (4) сохраняют силу. При больших числах Рейнольдса в квадратичной области сопротивления, где влияние вязкости исчезает, Л. Прандтлем на основе опытов И. Никурадзе [3] для труб с искусственной равнозернистой шероховатостью предложены соответственно зависимости

$$\frac{u}{u_*} = 8,48 + 5,75 \lg \frac{y}{k} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 1,74 + 2 \lg \frac{r}{k}. \quad (6)$$

Однако, как показывают многочисленные исследования, в практике инженерных расчетов мы имеем дело чаще всего с промежуточной, так наз. доквадратичной областью сопротивления, где приведенные выше формулы недействительны. Для описания гидравлических закономерностей этой области нет однозначных зависимостей. Хорошо известно, что закон сопротивления в доквадратичной области технических шероховатостей существенно отличается от закона сопротивления равнозернистой шероховатости, использованной в опытах И. Никурадзе.

В 1956 г. нами было предложено понятие «пристеночной турбулентности» [4, 5], сущность которого состоит в следующем.

Ж. Буссинеск первым ввел для турбулентного движения понятие коэффициента виртуальной вязкости (или коэффициента турбулентного перемешивания) ε , определяемого выражением

$$\tau = \rho \varepsilon \frac{du}{dy}. \quad (7)$$

Последнее отличается от общеизвестного выражения вязкостного трения Ньютона тем, что вязкость ν заменена виртуальной вязкостью ε .

Пристеночная турбулентность ε_0 — понятие, позволяющее описать распределение осредненных по времени скоростей в пределах тонкого пристеночного слоя у шероховатой стенки в виде, аналогичном формуле (1), где коэффициент вязкости ν заменяется коэффициентом турбулентности на стенке ε_0 .

Учет пристеночной турбулентности приводит к формуле распределения скоростей в потоке жидкости и формуле сопротивления, аналогичным соответственно формулам (2) и (3), где также ν заменяется на ε_0 ,

$$\frac{u}{u_*} = 5,5 + 5,75 \lg \frac{yu_*}{\varepsilon_0} \quad (8)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = 0,7 + 2 \lg \frac{ru_*}{\varepsilon_0}. \quad (9)$$

В [4, 5] показано, что пристеночная турбулентность описывается функцией вида

$$\frac{\varepsilon_0}{\nu} = f\left(\frac{ku_*}{\nu}\right). \quad (10)$$

В гладкостенной области сопротивления $\varepsilon_0/\nu = 1$. Далее это отношение возрастает с ростом числа Рейнольдса, характеризуя развитие турбулентности на стенке потока. В квадратичной области сопротивления зависимость (10) имеет простой вид

$$\frac{\varepsilon_0}{\nu} = m \frac{ku_*}{\nu}, \quad (11)$$

или

$$\varepsilon_0 = mku_*. \quad (12)$$

Подстановка (12) в (8) и (9) при $m = 0,3$ дает соответственно формулы (5) и (6).

В доквадратичной области сопротивления развитие пристеночной турбулентности имеет более сложный характер и зависит от геометрической структуры шероховатости. Но независимо от того, какой конкретный вид имеет функция (10), описывающая изменение пристеночной турбулентности, значение коэффициента ε_0 может быть получено на основании опытных данных о гидравлических сопротивлениях из формулы (9), которую лучше переписать в виде

$$\lg \frac{ru_*}{\varepsilon_0} = \frac{0,5}{\sqrt{\lambda}} - 0,35. \quad (13)$$

Тогда безразмерное расстояние от стенки подсчитывается из следующей формулы подстановкой в нее (13)

$$\lg \frac{yu_*}{\varepsilon_0} = \lg \frac{y}{r} + \lg \frac{ru_*}{\varepsilon_0}. \quad (14)$$

Так как формула (8) охватывает все области сопротивления турбулентного движения жидкости (формулы (2) и (5) отвечают частным случаям формулы (8)), то для ее проверки можно использовать многочисленные экспериментальные данные. Такая проверка в случае труб с равнoзернистой шероховатостью проведена нами для опытов И. Никурадзе [3], для всех опытных данных по распределению скоростей в трубах из разных материалов обширных исследований, проведенных Ф. А. Шевелевым [6], а также для опытов А. Д. Альтшуля и В. Калицуна [7]. Результаты обработки опытных данных частично приведены на рис. 1—3, где они свидетельствуют об удовлетворительном совпадении с формулой (8). Такое же совпадение наблюдается и для остальных опытных данных.

Однако соответствующие опытным данным точки, которые расположены у стенки труб, располагаются в большинстве случаев несколько ниже прямой, построенной по формуле (8), а точки вблизи оси трубы — несколько выше. Это хорошо видно на рис. 4, где приведены опытные данные для двух труб. Для наглядности точки, отвечающие одному и тому же профилю скоростей, объединены кривыми. Кривые имеют одинаковый вид и отражают закономерность, не учтенную формулой (8).

Логарифмические формулы Л. Прандтля неоднократно критиковались за недостаточную теоретическую обоснованность (невыполнение на оси трубы условия равенства нулю градиента скорости; отклонение опытных данных от расчетных). Эти недостатки побудили многих авто-

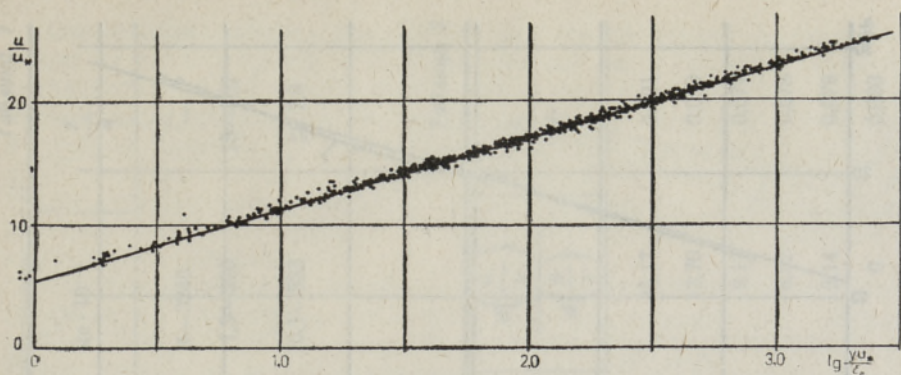


Рис. 1. Распределение скоростей в трубах с равномерной шероховатостью [3].

ров к созданию более точных, а также теоретически более обоснованных формул.

Если ограничиться задачей лишь более точного описания экспериментальных данных, то недостатки формулы (8) могут быть устранены введением добавочного члена

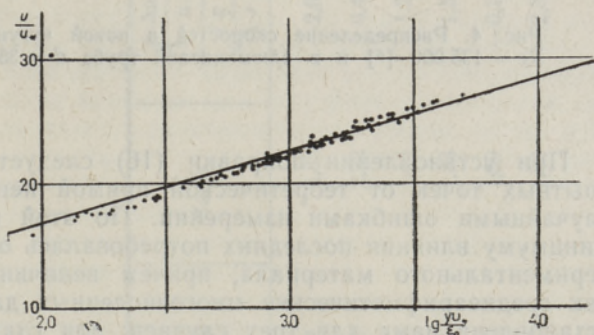


Рис. 2. Распределение скоростей в новых стальных трубах [7].

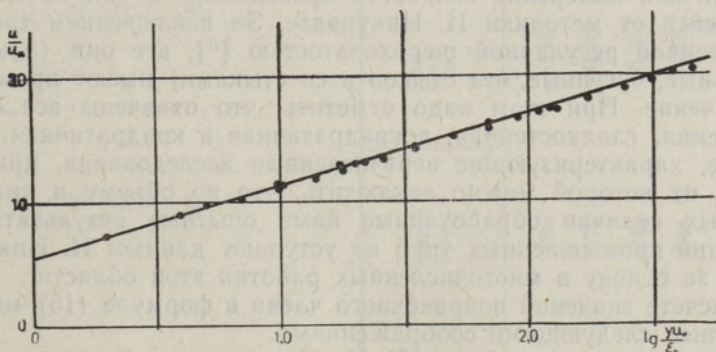


Рис. 3. Распределение скоростей в трубах с искусственными регулярными шероховатостями [6].

$$\frac{u}{u_*} = 5,5 + 5,75 \lg \frac{yu_*}{\epsilon_0} + \frac{\Delta u}{u_*}, \quad (15)$$

причем последний, согласно сказанному выше, имеет вид

$$\frac{\Delta u}{u_*} = f\left(\frac{y}{r}\right). \quad (16)$$

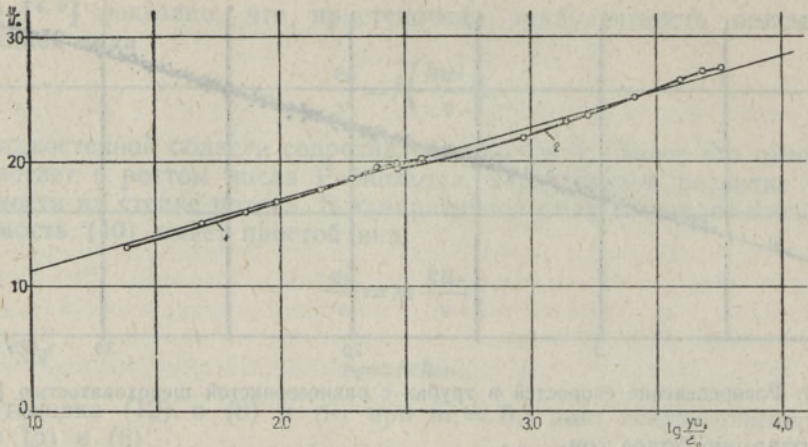


Рис. 4. Распределение скоростей в новой чугунной трубе $d = 152$ мм, $Re = 135\,000$ [6] и в алюминиевой трубе $d = 350$ мм, $Re = 263\,000$ [7].

При установлении поправки (16) следует учесть, что отклонения опытных точек от теоретической прямой невелики и соизмеримы со случайными ошибками измерений. По этой причине для сведения к минимуму влияния последних потребовалась обработка обширного экспериментального материала, причем величины $\Delta u/u_*$ подсчитывались как среднеарифметические многочисленных данных. Зависимость (16) установлена нами для трех случаев: для гладких труб И. Никурадзе [2], для труб с равнозернистой шероховатостью И. Никурадзе [3] и для труб, использованных в исследованиях Ф. А. Шевелева [6], а также А. Д. Альтшуля и В. Калицуна [7]. Данные работ [7, 6] рассматривались вместе, так как измерение скоростей проводилось в них по методике, отличающейся от методики И. Никурадзе. За исключением трех труб с искусственной регулярной шероховатостью [6], все они (алюминиевые, стальные, чугунные, без стыков и со стыками) имеют промышленное назначение. При этом надо отметить, что охвачены все области сопротивления: гладкостенная, доквдратичная и квадратичная.

Данные, характеризующие перечисленные исследования, приведены в табл. 1, из которой можно заключить, что по объему и диапазону характерных величин обработанные нами опытные результаты [7, 6] исследований промышленных труб не уступают данным И. Никурадзе, принятым за основу в многочисленных работах этой области.

При расчете значений поправочного члена в формуле (15) мы руководствовались следующими соображениями.

Данные табл. 2 из работы [2] И. Никурадзе по гладким трубам отличаются от данных его же табл. 3. Нами принята за основу табл. 2, как более надежная (см. [7, 8]).

В работах И. Никурадзе [2, 3] скорости измерялись в струе на расстоянии $0,1-0,2$ мм за выходным сечением трубы. Скорости, измеренные при $y = 0$, не имеют физического смысла и по этой причине нами не учтены.

В исследованиях [6, 7] скоростные профили снимались при постоянном режиме вдоль диаметра от стенки до стенки; таким образом получали два профиля. В многих случаях скорости измерялись по двум взаимно перпендикулярным диаметрам; это давало четыре профиля. В наших расчетах учтены все точки в отдельности и для каждой точки

Таблица 1

Шероховатость труб	Диаметры труб, мм	Количество труб	К-во исследованных режимов	К-во снятых профилей скоростей	К-во опытных точек	Re · 10 ⁻³	$\frac{r}{k}$
Гладкие	10—100	5	16	16	272	4—3240	—
Равнозернистая шероховатость	24,1—99,4	11	41	41	656	11,3—970	15—507
Технические шероховатости	16—350	23	81	220	1630	10,1—832	≥ 7,9

Таблица 2

Пределы интервала $\frac{y}{r}$	$\left(\frac{y}{r}\right)_{ср}$	Число точек	$\frac{\Delta u}{u_*}$	$\sigma_1, \%$	$\sigma_2, \%$	$d\left(\frac{\Delta u}{u_*}\right) / d\left(\frac{y}{r}\right)$	$d\left(\frac{u}{u_*}\right) / d\left(\frac{y}{r}\right)$	$\frac{\varepsilon}{ru_*}$
0—0,124	0,053	290	-0,434	5,02	4,85	-2,00	45,17	0,021
0,125—0,249	0,188	372	-0,401	2,79	2,22	0,40	13,70	0,059
0,25—0,382	0,297	242	-0,303	1,93	1,44	1,20	9,11	0,077
0,383—0,674	0,505	348	-0,070	1,26	1,33	1,56	6,32	0,078
0,675—0,999	0,752	292	0,168	1,67	1,59	-0,18	3,14	0,079
1,0	1,0	86	-0,063	1,67	1,62	-2,50	0	0,080

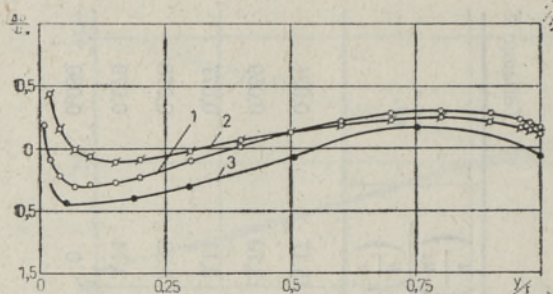


Рис. 5. Отклонение опытных данных от формулы (8).

1 — гладкие трубы; 2 — трубы с равномерной шероховатостью [3]; 3 — трубы с техническими шероховатостями [6, 7].

по формуле (15) подсчитано значение $\Delta u/u_*$. За исключением скоростей, измеренных на оси трубы, скорости измерялись не на одинаковых относительных расстояниях y/r от стенки, что несколько затрудняет их обработку. При этом точки распределены неравномерно: около половины точек расположено ближе к стенке, на расстояниях $y/r < 0,3$.

Полученные данные объединены в отдельные группы по интервалам значений y/r с числом точек свыше 240 в каждой группе. Для каждой группы подсчитывалось среднеарифметическое значение $\Delta u/u_*$, а также средневзвешенное значение y/r .

Результаты расчетов по промышленным трубам приведены в табл. 2. Кривые, изображающие зависимость (16), приведены на рис. 5.

Из этого рисунка можно заключить, что все три полученные кривые имеют одинаковый характер. Кривая 3, отвечающая техническим шероховатостям, расположена несколько ниже кривых, полученных из опытов И. Никурадзе, особенно у стенки трубы. Последнее обстоятельство можно объяснить тем, что в опытах И. Никурадзе скорости измерялись за выходным сечением, в то время как в исследованиях по промышленным трубам измерения проводились в трубах, на значительном расстоянии от выходного сечения. Следует отметить, что при одинаковых условиях разностям величины $\Delta u/u_*$ порядка 0,2—0,4 отвечают разности в скоростях порядка 1—3%.

Особый интерес с точки зрения практики представляют данные, относящиеся к техническим шероховатостям. Нами вычислены среднеквадратичные отклонения опытных значений скоростей (всего 1630 точек, из них 786 точек работы [6] и 844 точки работы [7]) от рассчитанных по формулам (8) и (15) значений, причем в последнем случае поправка $\Delta u/u_*$ определялась по кривой 3 рис. 5. В случае формулы (8) общее среднеквадратичное отклонение составляло 2,8%, а в случае формулы (16) — 2,6%. Эти отклонения почти одинаковы для обоих исследований [7, 6].

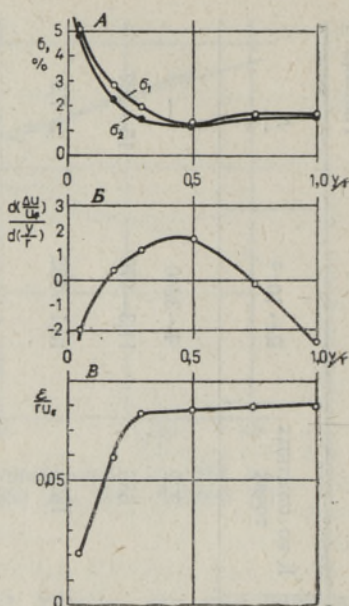


Рис. 6. А — среднеквадратичные отклонения опытных значений от рассчитанных по формуле (8) — σ_1 и по формуле (15) — σ_2 . Б — производная

$d\left(\frac{\Delta u}{u_*}\right) / d\left(\frac{y}{r}\right)$ в функции от $\frac{y}{r}$.

В — безразмерный коэффициент турбулентного перемешивания в функции от $\frac{y}{r}$.

Отклонения распределены в сечении трубы неравномерно, как это видно из табл. 2 и рис. 6, А. Для большей части опытных точек среднеквадратичное отклонение находится в пределах 1,3—2%. Если принять во внимание случайные ошибки измерения гидравлического уклона и средней скорости, то можно считать среднеквадратичные отклонения в большей части сечения трубы вполне приемлемыми. Из рис. 6, А видно также, что введение поправки $\Delta u/u_*$ увеличивает точность расчетов сравнительно мало, так как эта поправка невелика по сравнению со случайными ошибками.

Среднеквадратичные отклонения резко увеличиваются вблизи стенки, достигая на расстоянии $y/r = 0,05$ величины порядка 5%. Опытные данные показывают, что скорости, измеренные на одинаковом расстоянии от стенки, но в двух противоположных точках сечения трубы, часто отличаются друг от друга, причем эти отличия особенно заметны вблизи стенок, где они достигают 10%. Такие отклонения можно объяснить неточным определением расстояния от стенки, что имеет большое значение при больших градиентах скоростей. Однако это не является единственной причиной. Как показывают измерения в стальной трубе диаметром 205 мм [7], где снимались профили скоростей последовательно при 13 разных расходах, скорости, измеренные по горизонтальному диаметру в двух противоположных точках, систематически отличаются друг от друга. Так, на расстоянии $y/r = 0,051$ одна скорость больше другой в среднем на 3,8%, а на расстоянии $y/r = 0,163$ — на 3,3%. Такое систематическое отклонение приводит к выводу, что в данном случае шероховатость трубы неравномерна. Из этого можно заключить, что в трубах с техническими шероховатостями погрешности вблизи стенки трубы неизбежны даже при использовании наиболее совершенной измерительной аппаратуры.

Проведенный анализ позволяет рекомендовать для практических расчетов скоростей в трубах формулу (8), т. е. формулу без поправочного члена.

Более точная формула (15) в случае технических шероховатостей позволяет сделать некоторые выводы, представляющие теоретический интерес.

Если переписать формулу (15) с учетом равенства (14) в виде

$$\frac{u}{u_*} = 5,5 + 5,75 \lg \frac{ru_*}{\varepsilon_0} + 2,5 \ln \frac{y}{r} + \frac{\Delta u}{u_*}$$

и продифференцировать ее по y/r , то получим

$$\frac{d\left(\frac{u}{u_*}\right)}{d\left(\frac{y}{r}\right)} = \frac{2,5}{\frac{y}{r}} + \frac{d\left(\frac{\Delta u}{u_*}\right)}{d\left(\frac{y}{r}\right)}, \quad (17)$$

причем последний член может быть определен графическим дифференцированием кривой 3 (рис. 5).

Формуле (7) можно придать вид

$$\frac{\varepsilon}{ru_*} = \frac{1 - \frac{y}{r}}{\frac{d\left(\frac{u}{u_*}\right)}{d\left(\frac{y}{r}\right)}}, \quad (18)$$

что позволяет изучить изменение коэффициента турбулентного перемешивания в сечении трубы. Результаты расчетов приведены в табл. 2 и на рис. 6, Б, В. Наибольший интерес представляет правая часть кривой, где ошибки измерений наименьшие. Добавим, что в центре трубы формула (18) не позволяет подсчитать значение ε/ru_* . Эту трудность можно преодолеть, определив производные числителя и знаменателя, причем вторая производная $d^2\left(\frac{\Delta u}{u_*}\right)/d\left(\frac{y}{r}\right)^2$ определяется на оси трубы графически из рис. 6, Б. Далее, как показывают расчеты, опытные значения ν/ru_* в подавляющем числе случаев меньше 0,001, т. е. ничтожны по сравнению с значениями ε/ru_* , что позволяет влияние вязкости не учитывать.

Как видно из рис. 6, В, коэффициент турбулентного перемешивания имеет максимальное значение на оси трубы. К такому же результату пришел Ж. Госс [9] на основе измерений градиента скорости с помощью спаренных, прикрепленных друг к другу трубок Пито.

Из рис. 6, В можно также заключить, что в центральной области трубы коэффициент турбулентного перемешивания имеет почти постоянное значение, $\varepsilon/ru_* \approx 0,08$.

Эти результаты резко отличаются от результатов И. Никурадзе [2, 3], согласно которым максимальное значение ε/ru_* также равно 0,08, но соответствует расстоянию $y/r = 0,5$.

Наши результаты требуют дальнейшего экспериментального уточнения. Однако полученные данные позволяют утверждать, что на оси трубы коэффициент турбулентного перемешивания не равняется нулю, а имеет конечное значение. Отсюда, в свою очередь, можно заключить, что длина пути перемешивания

$$l = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\frac{du}{dy}}} \quad (19)$$

превращается в бесконечность на оси трубы. Следовательно, понятие пути перемешивания, предложенное в свое время Л. Прандтлем, может быть использовано только в условиях четко выраженного градиентного потока; в центральной области труб круглого сечения это понятие теряет свой смысл.

Обозначения

d — диаметр трубы;	$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$ — динамическая скорость;
r — радиус трубы;	τ — касательное напряжение;
y — расстояние от стенки;	τ_0 — касательное напряжение на стенке;
l — длина пути перемешивания;	ρ — плотность жидкости;
k — размер выступа шероховатости;	$\lambda = \frac{2gd_i}{v^2}$ — коэффициент сопротивления;
ν — кинематическая вязкость;	i — гидравлический уклон;
ε — коэффициент турбулентного перемешивания;	v — средняя скорость;
ε_0 — коэффициент турбулентного перемешивания на шероховатой стенке;	$Re = \frac{vd}{\nu}$ — число Рейнольдса.
u — локальная скорость;	

ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L., Neuere Ergebnisse der Turbulenzforschung, VDI, 77, Nr. 5 (1933).
2. Nikuradse J., Gesetzmässigkeiten der turbulenten Strömung in glatten Röhren, Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens, Nr. 356 (1932).
3. Nikuradse J., Strömungsgesetze in rauhen Röhren, VDI-Forschungsheft, Nr. 361 (1933).
4. Тепакс Л. А., Граничные условия турбулентного потока при обтекании шероховатых стенок, Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А, № 78 (1956).
5. Тепакс Л. А., Гидравлическое сопротивление труб в доквадратичной области, Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А, № 83 (1956).
6. Шевелев Ф. А., Исследование основных гидравлических закономерностей турбулентного движения в трубах, М., 1953.
7. Альтшуль А. Д., Гидравлические потери на трение в трубопроводах, М., 1963.
8. Miller B., The laminar film hypothesis, Transactions ASME, 1949.
9. Gosse J., Vues nouvelles sur l'écoulement turbulent des fluides dans les conduites lisses, Génie Chimique, 88, No. 3 (1962).

Институт термофизики и электрофизики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
8/VI 1972

L. ТЕПАКС

KIIRUSEJAOTUSEST UMMARGUSE RISTLÕIKEGA TORUDES

Turbulentset voolamist kareda seinä läheduses kirjeldatakse seosega, milles kinemaatilise viskoossuse koefitsient on asendatud seinäärsel turbulentse segunemise koefitsiendiga. Kasutades Prandtl-Nikuradse siledate torude kohta käivate valemite sellist asendust, saame seosed kiirusejaotuse ja takistuskoefitsiendi määramiseks, mis on kehtivad Reynoldsi arvu muutumise laias diapasoonis.

Seinäärsel turbulentse segunemise koefitsiendi väärtused arvutati torude takistuse katseandmeist ja saadud väärtusi kasutati kiirusejaotuse arvutamiseks torudes.

Kiirusejaotuse valemit kontrolliti teiste autorite katseandmete põhjal, kes olid katsetanud mitmesuguse tehnilise karedusega (terasest, malmist, alumiiniumist) torudega. Katseandmete ja arvutatud suuruste võrdlus näitab, et toru ristlõike suuremas osas on erinevused 1,3—2, seinä läheduses — 5% piires. Erinevused seinä läheduses on seletatavad ühelt poolt vigadega kauguse määramisel seinast, teiselt poolt aga kareduse ebaühtlase jaotumisega torudes.

Täpsustatud kiirusprofiili analüüsi tulemuste alusel võib järeldada, et Boussinesq'i turbulentse segunemise koefitsient on maksimaalne toru teljel, ja et Prandtl'i segunemispikkuse mõiste ei kehti toru telje läheduses.

L. ТЕПАКС

VELOCITY DISTRIBUTION IN CIRCULAR PIPES

The turbulent flow near the rough wall is described by a dependence in which the kinematic viscosity coefficient is substituted by the coefficient of turbulent transfer on the wall. By means of such substitution in corresponding formulas for Prandtl-Nikuradse smooth pipes the dependences of velocity distribution and resistance coefficient valid for a wide range of Reynolds numbers are obtained.

The values of the coefficients of turbulent transfer on the wall have been calculated from the experimental data on the resistance of pipes and these values are used for the calculation of velocities in the pipes.

The velocity distribution formula is checked on by experimental data of other authors for the pipes with different technical roughness (steel, cast-iron, aluminium pipes). The comparison of the experimental data with the results of calculation gives an agreement in most part of the pipe section to a precision of 1.3—2 per cent and near the wall to that of 5 per cent. The discrepancy near the wall is explained by errors in determining the distance from the wall and by inhomogeneity of technical roughness.

On the basis of the analysis of refined velocity profile one can conclude that the Boussinesq coefficient of turbulent transfer has maximum value on the pipe axis. The conception of Prandtl's mixing length has no meaning near the pipe axis.