EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.4.04

УДК 519.4

ЛЕЙДА ТУУЛМЕТС, ЭБУ ТАММ

ФОКАЛЬНЫЕ ПСЕВДОКОНГРУЭНЦИИ С ПОСТОЯННЫМИ ИНВАРИАНТАМИ В R_4

Фокальные псевдоконгруэнции (семейства прямолинейных образующих гиперповерхности ранга 2) в евклидовом пространстве R_4 рассмотрены в работах [1–6]. В настоящей статье исследуются некоторые классы нецилиндрических неизотропных фокальных псевдоконгруэнций в евклидовом пространстве R_4. Последнее может быть или собственно евклидовым пространством $^0R_4$ или псевдоевклидовым пространством Лоренца—Минковского $^1R_4$. В последнем случае предполагается, что прямолинейная образующая находится внутри изотропного конуса. В дальнейшем, для простоты, будем говорить просто о фокальных псевдоконгруэнциях, опуская прилагательные «нецилиндрическое» или «неизотропное».

В § 1, имеющем вводный характер, даются нужные в дальнейшем формулы и определения. В § 2 рассматриваются фокальные псевдоконгруэнции, у которых полный или средний параметры распределения постоянны. В § 3 доказывается существование псевдосферической фокальной псевдоконгруэнции, т. е. такой, у которой фокальные поверхности имеют постоянные отрицательные гауссовы кривизны.

В § 4 исследуется класс, который является пересечением двух первых упомянутых классов, т. е. случай, когда полный и средний параметры одновременно постоянны. Фокальную псевдоконгруэнцию этого класса будем называть фокальной псевдоконгруэнцией C. Она существует и определяется с произволом четырех функций одного аргумента. Оказывается, что фокальная псевдоконгруэнция C является псевдосферической. Обратное не имеет места: не каждая псевдосферическая фокальная псевдоконгруэнция является фокальной псевдоконгруэнцией C.

§ 1. Выбор канонического репера фокальной псевдоконгруэнции в R_4

К каждой образующей фокальной псевдоконгруэнции V_3 в R_4 присоединяется ортонормированный репер так, чтобы начальная точка M репера помещалась в центре образующей, единичный (при $^0R_4$) или мнимо-единичный (при $^1R_4$) вектор $\mathbf{e}_0$ направлялся вдоль прямолинейной образующей, единичный вектор $\mathbf{e}_3$ направлялся вдоль нормали к поверхности V_3, единичные векторы $\mathbf{e}_i\,(i, j, k, \ldots = 1, 2)$ были касательными к распределительным поверхностям [3].

В выбранном репере формы инфинитезимального преобразования подвижного репера следующие:

$$d\mathbf{M}=\omega^i \mathbf{e}_i, \quad d\mathbf{e}_I=\omega_I^K \mathbf{e}_K \quad (I, J, K, \ldots=0, 1, 2, 3), \tag{1.1}$$

а между формами ω^I, ω_K^I имеют место соотношения

$$\omega^3=\omega_0^3=0, \quad \omega_i^0=\varepsilon\omega_0^i, \quad \omega_\alpha^\beta=-\omega_\beta^\alpha \qquad (\alpha, \beta, \gamma, \ldots=1, 2, 3), \tag{1.2}$$

где $\varepsilon=-(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_0)=\pm 1$: при ${}^0R_4$ $\varepsilon=-1$ и при ${}^1R_4$ $\varepsilon=1$.

В выбранном каноническом репере фокальная псевдоконгруэнция V_3 определяется следующей системой пфаффовых уравнений:

$$\begin{aligned} &\omega^3=0, \quad \omega_0^1=t\omega^2, \quad \omega_1^3=f\omega^1+c\omega^2, \\ &\omega_0^3=0, \quad \omega_0^2=u\omega^1, \quad \omega_2^3=c\omega^1+\frac{t}{u}f\omega^2, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где ω^1, ω^2 являются главными формами и величины t, u, f, c — величинами первого порядка. При такой канонизации предполагается, что

$$tu(t+u)\neq 0. \tag{1.4}$$

Если $t+u=0$, то фокальная псевдоконгруэнция является изотропной [2]. Если $tu=0$, то фокальная псевдоконгруэнция является цилиндрической [1]. В этой работе мы исследуем только нецилиндрические и неизотропные фокальные псевдоконгруэнции. Для простоты будем называть их фокальными псевдоконгруэнциями.

Первая продолженная система системы (1.3) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &\omega_1^2=\sigma\omega^1+\tau\omega^2, \\ &t\omega^0=\mu\omega^1+\nu\omega^2, \\ &dt=[u\nu-(t+u)\tau]\omega^1+\vartheta\omega^2, \\ &du=\varphi\omega^1+[u\mu+(t+u)\sigma]\omega^2, \\ &df=\left(\xi-\frac{u}{t}c\mu\right)\omega^1+\left[\pi+\left(2\tau-\frac{u}{t}\nu\right)c\right]\omega^2, \\ &dc=\left(\pi-f\mu+\frac{t-u}{u}f\sigma\right)\omega^1+\left(\frac{t}{u}\xi-\frac{tf}{u^2}\varphi+2c\sigma-2f\tau\right)\omega^2, \end{aligned} \tag{1.5}$$

где величины σ, τ, μ, ν, ϑ, φ, ξ, π являются величинами второго порядка.

В работах [2,6] выведены выражения для основных геометрических характеристик фокальной псевдоконгруэнции в выбранном каноническом репере. В настоящей работе нам нужны следующие из них:

полный и средний параметры распределения соответственно

$$k=-\frac{1}{tu}, \quad h=\frac{t-u}{2tu}; \tag{1.6}$$

расстояние между граничными точками фокальной псевдоконгруэнции

$$d=\frac{t+u}{u}; \tag{1.7}$$

гауссовы кривизны фокальных поверхностей $\{F_1\}$ и $\{F_2\}$ соответственно

$$K_1=\frac{G_1+G_2}{E_1+E_2},\quad K_2=\frac{G_1-G_2}{E_1-E_2}, \tag{1.8}$$

где

$$E_1=\frac{1}{2M\sqrt{u}}\left(-\frac{1}{u\sqrt{u}}\varphi+\frac{t+u}{t\sqrt{u}}\tau-\frac{3\sqrt{u}}{t}\nu\right),$$

$$E_2=\frac{1}{2M\sqrt{u}}\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\vartheta+\frac{t+u}{u\sqrt{t}}\sigma+\frac{3\sqrt{u}}{t}\mu\right),$$

$$G_1=\frac{1}{2(t+u)^{3/2}}[t\sqrt{t}\varphi+3u\sqrt{t}(t+u)\tau-u^2\sqrt{t}\nu], \tag{1.9}$$

$$G_2=\frac{1}{2(t+u)^{3/2}}[-u\sqrt{u}\vartheta+3t\sqrt{u}(t+u)\sigma+tu\sqrt{u}\mu],$$

$$M=\sqrt{\frac{t}{t+u}}$$

и предполагается, что $E_1+E_2\neq 0$, $E_1-E_2\neq 0$, т. е. фокальные поверхности не вырождаются в линию.

§ 2. Фокальные псевдоконгруэнции с постоянными полным или средним параметрами распределения в R_4

1. Рассмотрим сперва фокальную псевдоконгруэнцию с постоянным полным параметром распределения.

Так как в этом случае

$$k=k_0=\mathrm{const}, \tag{2.1}$$

то в силу (1.4), (1.6) $k_0\neq 0$ и

$$u=-\frac{1}{k_0t},\quad t+u=\frac{k_0t^2-1}{k_0t}\neq 0. \tag{2.2}$$

Соответствующая фокальная псевдоконгруэнция ${}^kV_3$ определяется на основании (1.3) и (2.2) следующей системой пфаффовых уравнений:

$$\begin{aligned}&\omega^3=0,\quad \omega_0^1=t\omega^2,\quad \omega_1^3=f\omega^1+c\omega^2,\\ &\omega_0^3=0,\quad \omega_0^2=-\frac{1}{k_0t}\omega^1,\quad \omega_2^3=c\omega^1-k_0t^2f\omega^2.\end{aligned} \tag{2.3}$$

При внешнем дифференцировании системы (2.3) находим

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{1}{k_0t}-t\right)\omega_1^2+\frac{1}{k_0}\omega^0\right]\wedge\omega^1+dt\wedge\omega^2=0,\\ &\left[\left(t-\frac{1}{k_0t}\right)\omega_1^2-\frac{1}{k_0}\omega^0\right]\wedge\omega^2+\frac{dt}{k_0t^2}\wedge\omega^1=0,\\ &\left(df-2c\omega_1^2-\frac{c}{tk_0}\omega^0\right)\wedge\omega^1+[dc+f(1+k_0t^2)\omega_1^2+tf\omega^0]\wedge\omega^2=0,\end{aligned} \tag{2.4}$$

$$[dc+f(1+k_0t^2)\,\omega_1^2+tf\omega^0]\wedge\omega^1+\left[-k_0t^2\,dt+k_0^2t^2f\left(1-\frac{1}{k_0t}\right)dt+\right.$$
$$\left.+2c\omega_1^2+tc\omega^0\right]\wedge\omega^2=0,$$

откуда при помощи леммы Картана получим

$$\begin{aligned}
\omega_1^2 &= \sigma\omega^1+\tau\omega^2,\\
t\omega^0 &= \mu\omega^1+\nu\omega^2,\\
dt &= -\frac{1}{k_0t}[(k_0t^2-1)\tau+\nu]\omega^1+\frac{1}{k_0}[(k_0t^2-1)\sigma-k_0t\mu]\omega^2,\\
df &= \left(\xi+\frac{1}{k_0t^2}c\mu\right)\omega^1+\left[\pi+\left(2\tau+\frac{\nu}{k_0t^2}\right)c\right]\omega^2,\\
dc &= [\pi+(k_0t^2+1)f\sigma-f\mu]\omega^1+(-k_0t^2\xi-k_0t^3f\varphi+2c\sigma-2f\tau)\omega^2.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Величинами второго порядка будут здесь σ, τ, μ, ν, ξ, π $(N=6)$. Для нахождения числа Картана Q составим следующую таблицу.

ω_1^2	ω^0	dt	df	dc
$\left(\frac{1}{k_0t}-t\right)\zeta^1$	$\frac{1}{k_0}\zeta^1$	ζ^2	—	—
$\left(t-\frac{1}{k_0t}\right)\zeta^1$	$\frac{1}{k_0}\zeta^2$	$\frac{1}{k_0t^2}\zeta^2$	—	—
$-2c\zeta^1+f(1+k_0t^2)\zeta^2$	$-\frac{c}{k_0t}\zeta^1+tf\zeta^2$	—	ζ^1	ζ^2
$f(1+k_0t^2)\zeta^1+2c\zeta^2$	$tf\zeta^1+tc\zeta^2$	$k_0^2t^2f\left(1-\frac{1}{k_0t}\right)\zeta^2$	$-k_0t^2\zeta^2$	ζ^1

Ранг матрицы, составленной из элементов таблицы, $s_1=4$. Данная матрица расширена дополнением ее первоначальной матрицей, где замещены $\zeta^1\to\eta^1$ и $\zeta^1\to\eta^2$. Ранг расширенной таким образом матрицы равен $s_1+s_2=5$. Следовательно, $s_2=1$ и число Картана $Q=s_1+2s_2=6$. Система находится в инволюции, фокальная псевдоконгруэнция ${}^kV_3$ существует и определяется *с произволом одной функции двух аргументов.*

2. Рассмотрим фокальную псевдоконгруэнцию ${}^hV_3$ с постоянным средним параметром распределения h.

Если $h=h_0=\mathrm{const}$, то в силу (1.4) и (1.6)

$$h_0=\frac{t-u}{2tu},\quad u=\frac{t}{2h_0t+1},\quad t+u=\frac{2t(h_0t+1)}{2h_0t+1}\neq0. \tag{2.6}$$

Система пфаффовых уравнений (1.3) в силу (2.6) имеет тогда следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\omega^3=0,\quad \omega_0^1=t\omega^2,\quad \omega_1^3=f\omega^1+c\omega^2,\\
&\omega_0^3=0,\quad \omega_0^2=\frac{t}{2h_0t+1}\omega^1,\quad \omega_2^3=c\omega^1+(2h_0t+1)f\omega^2.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Аналогичным путем, как было сделано в случае ${}^hV_3$, легко доказать, что фокальная псевдоконгруэнция ${}^hV_3$ существует в R_4 и определяется с *произволом одной функции двух аргументов.*

§ 3. Псевдосферическая фокальная псевдоконгруэнция в R_4

Фокальную псевдоконгруэнцию V_3 будем называть псевдосферической, если обе ее фокальные поверхности являются псевдосферами, т. е. поверхностями постоянной отрицательной гауссовой кривизны.

Гауссовы кривизны фокальных поверхностей $\{F_1\}$ и $\{F_2\}$ фокальной псевдоконгруэнции определяются формулами (1.8), (1.9). В случае псевдосферической фокальной псевдоконгруэнции

$$\frac{G_1+G_2}{E_1+E_2}=K_1=-m_1^2, \quad \frac{G_1-G_2}{E_1-E_2}=K_2=-m_2^2, \tag{3.1}$$

где $m_1 = \text{const}$ и $m_2 = \text{const}$. Следовательно,

$$\begin{gathered} G_1+G_2+m_1^2(E_1+E_2)=0, \\ G_1-G_2+m_2^2(E_1-E_2)=0, \end{gathered} \tag{3.2}$$

или

$$\begin{gathered} \alpha_1\varphi+\alpha_2\vartheta=\alpha_3\sigma+\alpha_4\tau+\alpha_5\mu+\alpha_6\nu, \\ \beta_1\varphi+\beta_2\vartheta=\beta_3\sigma+\beta_4\tau+\beta_5\mu+\beta_6\nu, \end{gathered} \tag{3.3}$$

где

$$\begin{gathered} \alpha_1=\frac{t^2u^2+\alpha(t+u)^2}{u^2\sqrt{t}}, \quad \alpha_2=-\frac{\beta(t+u)^2}{t^2\sqrt{u}}, \quad \alpha_3=\frac{\beta(t+u)^3}{tu\sqrt{u}}, \\ \alpha_4=\frac{t+u}{tu\sqrt{t}}[\alpha(t+u)^2-3t^2u^2], \quad \alpha_5=\frac{3\beta(t+u)^2}{t\sqrt{u}}, \quad \alpha_6=\frac{t^2u^2-3\alpha(t+u)^2}{t\sqrt{t}}, \\ \beta_1=\frac{\beta(t+u)^2}{u^2\sqrt{t}}, \quad \beta_2=-\frac{t^2u^2+\alpha(t+u)^2}{t^2\sqrt{u}}, \quad \beta_3=\frac{t+u}{tu\sqrt{u}}[\alpha(t+u)^2-3t^2u^2], \\ \beta_4=\frac{\beta(t+u)^3}{tu\sqrt{t}}, \quad \beta_5=\frac{3\alpha(t+u)^2-t^2u^2}{t\sqrt{u}}, \quad \beta_6=\frac{-3\beta(t+u)^2}{t\sqrt{t}}, \\ 2\alpha=-(m_1^2+m_2^2), \quad 2\beta=m_2^2-m_1^2. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Определим из системы (3.3) величины φ и ϑ

$$\varphi=\frac{D_1}{D}, \quad \vartheta=\frac{D_2}{D}, \tag{3.5}$$

где

$$\begin{gathered} D=\frac{1}{t^2u^2\sqrt{tu}}[t^2u^2-m_1^2(t+u)^2][t^2u^2-m_2^2(t+u)^2], \\ D_1=(\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3)\sigma+(\alpha_4\beta_2-\alpha_2\beta_4)\tau+(\alpha_5\beta_2-\alpha_2\beta_5)\mu+(\alpha_6\beta_2-\alpha_2\beta_6)\nu, \\ D_2=(\alpha_1\beta_3-\alpha_3\beta_1)\sigma+(\alpha_1\beta_4-\beta_1\alpha_4)\tau+(\alpha_1\beta_5-\beta_1\alpha_5)\mu+(\alpha_1\beta_6-\beta_1\alpha_6)\nu. \end{gathered} \tag{3.6}$$

Здесь предполагается, что $D \neq 0$. Отметим, что если $D = 0$, то либо $m_1^2 = \dfrac{t^2u^2}{(t+u)^2}$, либо $m_2^2 = \dfrac{t^2u^2}{(t+u)^2}$, либо оба соотношения имеют место одновременно. Такие случаи мы исключим из общего рассмотрения. Выражения (3.5) можно еще раз переписать в виде

$$\begin{aligned} \varphi &= A_\varphi\sigma + B_\varphi\tau + C_\varphi\mu + D_\varphi\nu, \\ \vartheta &= A_\vartheta\sigma + B_\vartheta\tau + C_\vartheta\mu + D_\vartheta\nu, \end{aligned} \tag{3.7}$$

где в силу (3.5), (3.6)

$$\begin{aligned} DA_\varphi &= \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3, & DA_\vartheta &= \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1, \\ DB_\varphi &= \alpha_4\beta_2 - \alpha_2\beta_4, & DB_\vartheta &= \alpha_1\beta_4 - \beta_1\alpha_4, \\ DC_\varphi &= \alpha_5\beta_2 - \alpha_2\beta_5, & DC_\vartheta &= \alpha_1\beta_5 - \beta_1\alpha_5, \\ DD_\varphi &= \alpha_6\beta_2 - \alpha_2\beta_6, & DD_\vartheta &= \alpha_1\beta_6 - \beta_1\alpha_6. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Покажем существование псевдосферической фокальной псевдоконгруэнции в общем случае. Подставим выражения (3.7) в систему (1.5) и продифференцируем полученную систему внешним образом. Тогда

$$\begin{aligned} & d\sigma\wedge\omega^1 + (d\tau - {}'\tau^1\omega^1)\wedge\omega^2 = 0, \\ & d\mu\wedge\omega^1 + (d\nu - {}'\nu^1\omega^1)\wedge\omega^2 = 0, \\ & [u\,d\nu - (t+u)\,d\tau]\wedge\omega^1 + (A_\vartheta\,d\sigma + B_\vartheta\,d\tau + C_\vartheta\,d\mu + D_\vartheta\,d\nu + E_\vartheta\omega^1)\wedge\omega^2 = 0, \\ & (A_\varphi\,d\sigma + B_\varphi\,d\tau + C_\varphi\,d\mu + D_\varphi\,d\nu)\wedge\omega^1 + [u\,d\mu + (t+u)\,d\sigma + E_\varphi\omega^1]\wedge\omega^2 = 0, \\ & \left(d\xi - \frac{u}{t}c\mu\right)\wedge\omega^1 + \left(d\pi + 2c\,d\tau - \frac{u}{t}c\nu - {}'\pi^1\omega^1\right)\wedge\omega^2 = 0, \\ & \left(d\pi - f\,d\mu - \frac{t-u}{u}f\sigma\right)\omega^1 + \left[\frac{t}{u}d\xi + \left(2c - \frac{tf}{u^2}A_\varphi\right)d\sigma - \right. \\ & \left. - \left(2f - \frac{tf}{u^2}B_\varphi\right)d\tau - \frac{tf}{u^2}C_\varphi\,d\mu - tf\,D_\varphi\,d\nu - {}'\xi^1\omega^1\right]\wedge\omega^2 = 0, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где величины ${}'\tau^1$, ${}'\nu^1$, ${}'\pi^1$, ${}'\xi^1$, E_ϑ, E_φ являются комбинациями величин первого и второго порядков. Составив соответствующую таблицу (см. § 2), легко найти, что ранг матрицы $s_1 = 6$ и число Картана $Q = s_1 = 6$. Отметим, что таблицу можно составить независимо от слагаемых $(\ldots)\ \omega^1\wedge\omega^2$, т. е. по модулю $\omega^1\wedge\omega^2$ [7].

При помощи леммы Картана из системы (3.9) найдем

$$\begin{aligned} d\sigma &= S\omega^1 + S_1\omega^2, \\ d\tau &= (S_1 + {}'\tau^1)\,\omega^1 + S_2\omega^2, \\ d\mu &= T\omega^1 + T_1\omega^2, \\ d\nu &= (T_1 + {}'\nu^1)\,\omega^1 + T_2\omega^2, \\ d\xi &= U\omega^1 + U_1\omega^2, \\ d\pi &= \left[U_1 - 2c(S_1 + {}'\tau^1) + \frac{u}{t}c{}'\nu^1 + {}'\pi^1\right]\omega^1 + U_2\omega^2, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где

$$\begin{aligned} & uT_2 - (t+u)S_2 = A_\vartheta S + C_\vartheta T + B_\vartheta S_2 + D_\vartheta T_1 + B_\vartheta{}'\tau^1 + D_\vartheta{}'\nu^1 + E_\vartheta = 0, \\ & D_\varphi T_2 - B_\varphi S_2 = (t+u)S + uT - A_\varphi S_1 - C_\varphi T_1 + E_\varphi = 0, \end{aligned}$$

$$U_2 = \frac{t}{u} U + \left(2c - \frac{tf}{u^2} A_\varphi\right) S - \frac{tf}{u^2} C_\varphi T -$$
$$- \left(2f + \frac{tf}{u^2}\right) S_1 - tfD_\varphi T_1 - \left(2f + \frac{tf}{u^2} B_\varphi\right) \tau^1 - tfD_\varphi{}' \nu^1 - \xi^1,$$

а определитель

$$\begin{vmatrix} u & -(t+u) \\ D_\varphi & B_\varphi \end{vmatrix}$$

в общем случае не равен нулю. Из систем (3.9), (3.10) следует, что число новых неизвестных величин третьего порядка в общем случае $N = 6$, т. е. $Q = N$. Следовательно, система находится в инволюции, псевдосферическая фокальная псевдоконгруэнция существует и *определяется с произволом шести функций одного аргумента.*

§ 4. Фокальная псевдоконгруэнция C

Рассмотрим пересечение классов фокальных псевдоконгруэнций, исследованных в § 2, т. е. класс, при котором полный и средний параметры распределения одновременно постоянны ($k = k_0 = \text{const}$ и $h = h_0 = \text{const}$). Такой класс фокальной псевдоконгруэнции будем называть фокальной псевдоконгруэнцией C или C-фокальной псевдоконгруэнцией.

Оказывается, что тогда в пфаффовых уравнениях (1.3) величины t и u постоянны. Действительно, в силу (1.6), (1.7)

$$k_0 = -\frac{1}{tu}, \quad h_0 = \frac{u-t}{2tu}, \tag{4.1}$$

т. е. t и u являются решениями квадратного уравнения с постоянными коэффициентами. Так как $t = \text{const}$ и $u = \text{const}$, то $dt = du = 0$ и из (1.5) получаем

$$\varphi = \vartheta = 0, \quad u\nu - (t+u)\tau = 0, \quad u\mu + (t+u)\sigma = 0, \tag{4.2}$$

откуда находим, что

$$\mu = -\frac{t+u}{u}\sigma, \quad \nu = \frac{t+u}{u}\tau \tag{4.3}$$

и система (1.5) в силу (3.3), (3.4) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 &= \sigma\omega^1 + \tau\omega^2, \\ t\omega^0 &= -\frac{t+u}{u}\sigma\omega^1 + \frac{t+u}{u}\tau\omega^2, \\ df &= \left(\xi + \frac{t+u}{t}c\sigma\right)\omega^1 + \left(\pi + \frac{t-u}{t}c\tau\right)\omega^2, \\ dc &= \left(\pi + \frac{2t}{u}f\sigma\right)\omega^1 + \left(\frac{t}{u}\xi + 2c\sigma - 2f\tau\right)\omega^2. \end{aligned} \tag{4.4}$$

При внешнем дифференцировании из системы (4.4) получаем

$$\begin{gathered} d\sigma\wedge\omega^1+(d\tau-\tau^1\omega^1)\wedge\omega^2=0,\\ d\sigma\wedge\omega^1-(d\tau-{}^0\tau^1\omega^1)\wedge\omega^2=0,\\ \left(\nabla\xi+\frac{t+u}{t}c\,d\sigma\right)\wedge\omega^1+\left(\nabla\pi+\frac{t-u}{t}c\,d\tau\right)\wedge\omega^2=0,\\ \left(\nabla\pi+\frac{2t}{u}f\,d\sigma\right)\wedge\omega^1+\left(\frac{t}{u}\nabla\xi+2c\,d\sigma-2f\,d\tau\right)\wedge\omega^2=0, \end{gathered}\tag{4.5}$$

где

$$\nabla\xi=d\xi-\xi^1\omega^1,\quad \nabla\pi=d\pi-\pi^1\omega^1,$$

и

$$\begin{gathered} \tau^1=\frac{t}{u}\sigma^2+\frac{u}{t}\tau^2-\varepsilon tu-\frac{t}{u}f^2+c^2,\\ {}^0\tau^1=\frac{t}{u}\sigma^2-\frac{u}{t}\tau^2-\frac{\varepsilon tu}{t+u}(t-u),\\ \pi^1=\frac{2t+u}{u}\sigma\xi+\frac{2u-t}{t}\sigma\pi+\frac{2u^2+t^2+3tu}{tu}c\sigma^2+\frac{u(t-u)}{t^2}c\tau^2-2\frac{t^2+u^2}{tu}f\sigma\tau,\\ \frac{t}{u}\xi^1=3\tau\xi+\frac{3t-2u}{u}\sigma\pi+\frac{2t^2}{u^2}c\sigma^2-2\frac{u}{t}f\tau^2+2\frac{3u^2+t^2-tu}{tu}c\sigma\tau. \end{gathered}\tag{4.6}$$

При помощи леммы Картана из системы (3.6) следует, что

$$\begin{gathered} d\sigma=S\omega^1-\frac{\tau^1+{}^0\tau^1}{2}\omega^2,\\ d\tau=\frac{\tau^1-{}^0\tau^1}{2}\omega^2+S_1\omega^2,\\ d\xi=(V+\xi^1)\omega^1+V_1\omega^2,\\ d\pi=\left[V_1+\pi^1-c\left(\tau^1+\frac{u}{t}{}^0\tau^1\right)\right]\omega^1+\\ +\left[\frac{t}{u}V+2cS-f\left(\frac{u-t}{u}\tau^1-\frac{u+t}{u}{}^0\tau^1\right)\right]\omega^2, \end{gathered}\tag{4.7}$$

где S, S_1, V, V_1 — новые неизвестные величины третьего порядка. Из системы (3.6) следует, что число Картана $Q=s_1=4$, а из системы (4.7) видно, что число новых неизвестных $N=4$ (см. § 2). Следовательно, система (4.4) находится в инволюции, фокальная псевдоконгруэнция C существует и определяется с *произволом четырех функций одного аргумента.*

Фокальную псевдоконгруэнцию в R_4 будем называть фокальной псевдоконгруэнцией W, если гауссовы кривизны K_1 и K_2 ее фокальных поверхностей связаны соотношением

$$K_1K_2=\frac{1}{d^4},\tag{4.8}$$

где d — расстояние между граничными точками образующей. Это определение обобщает определение конгруэнции W, известное в теории конгруэнций в R_3 ([8], с. 90).

Теорема 1. *Каждая фокальная псевдоконгруэнция C принадлежит классу фокальных псевдоконгруэнций W в R_4.*

Доказательство. На основании соотношений (1.8), (1.9) и (4.2), (4.3) гауссовы кривизны фокальных поверхностей $\{F_1\}$ и $\{F_2\}$ фокальной псевдоконгруэнции C выражаются в виде

$$K_1=K_2=-\left(\frac{tu}{t+u}\right)^2<0. \tag{4.9}$$

В случае фокальной псевдоконгруэнции C в силу (1.7) и (1.9) условие (4.8) выполнено и $C \subset W$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Каждая фокальная псевдоконгруэнция C является псевдосферической. Обратное утверждение не имеет места.*

Действительно, так как в случае фокальной псевдоконгруэнции C $t = \text{const}$ и $u = \text{const}$, то в силу (4.9) ее фокальные поверхности — псевдосферы. Второе утверждение теоремы следует из соотношений (4.2), (3.3)—(3.8) и (1.5). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лумисте Ю. Г., Туулметс Л. А., Изв. вузов, Математика, **26**, № 1, 72 (1962).
2. Туулметс Л. А., Некоторые классы линейчатых гиперповерхностей V_3 в евклидовом пространстве R_4, Дисс. канд. физ.-матем. н., Тарту, 1966.
3. Туулметс Л. А., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, № 150, 109 (1964).
4. Туулметс Л. А., Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем. и техн. н., **XIII**, 210 (1964).
5. Туулметс Л. А., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, № 206, 37 (1967).
6. Туулметс Л. А., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, № 305, 41 (1972).
7. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.—Л., 1948.
8. Фиников С. П., Теория конгруэнций, М.—Л., 1950.

Тартуский государственный университет

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
6/III 1972

LEIDA TUULMETS, EBU TAMM

KONSTANTSETE INVARIANTIDEGA FOKAALSED PSEUDOKONGRUENTSID RUUMIS R_4

Uuritakse ruumis R_4 mittesilindrilise ja mitteisotroopse fokaalse pseudokongruentsi V_3 klasse, mille korral kas täis- või keskmine või mõlemad jaotusparameetrid on konstantsed või fokaalpinnad on pseudosfäärid (pseudosfääriline fokaalne pseudokongruents). Tõestatakse mainitud klasside olemasolu. Seejuures võib ruum R_4 olla kas päriseukleidiline ruum $^0R_4$ või pseudoeukleidiline ruum $^1R_4$. Viimasel juhul eeldatakse, et fokaalse pseudokongruentsi moodustaja asetseb isotroopses koonuses.

Suuremat tähelepanu pööratakse fokaalse pseudokongruentsi erijuhu uurimisele, mille korral täis- ja keskmine jaotusparameeter on konstantsed. Vaadeldud juhule anti nimetus fokaalne pseudokongruents C. Tõestatakse, et iga fokaalne pseudokongruents C on 1) pseudosfääriline, kuid mitte vastupidi, ja 2) fokaalne pseudokongruents W.

LEIDA TUULMETS, EBU TAMM

FOCAL PSEUDOCONGRUENCE WITH CONSTANT INVARIANTS IN SPACE R_4

In this paper some classes of the noncylindric nonisotropic focal pseudocongruence V_3 in space R_4 have been investigated. In the case of these classes the full or/and average distribution parameters are constant or focal surfaces are pseudospheres (pseudospheric focal pseudocongruence). The existence of the classes mentioned above has been proved. Space R_4 considered in this work is either proper Euclidean space $^0R_4$ or pseudo-Euclidean space $^1R_4$. In the case of the latter it has been assumed that the generator of the focal pseudocongruence is placed in the isotropic cone.

Some attention has been devoted to the special case with the constant full and average distribution parameters. The case has been called focal pseudocongruence C. It has been proved that any focal pseudocongruence C is (i) focal pseudocongruence W and not vice versa, (ii) the pseudospheric one and not vice versa.