EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.4.03

УДК 519.4

ЛЕЙДА ТУУЛМЕТС, Х. ОЙДЪЯРВ

B-ФОКАЛЬНАЯ И НОРМАЛЬНАЯ B-ФОКАЛЬНАЯ ПСЕВДОКОНГРУЭНЦИЯ В R_4

В трехмерном евклидовом пространстве R_3 конгруэнция называется, как известно, B-конгруэнцией, если гауссовы кривизны фокальных поверхностей конгруэнции в точках одной образующей одни и те же и равны с противоположным знаком обратной величине квадрата расстояния между граничными точками этой образующей [1].

Аналогично этому в четырехмерном евклидовом пространстве R_4 (которое может быть собственно евклидовым пространством $^0R_4$ или псевдоевклидовым пространством Лоренца—Минковского $^1R_4$) фокальную псевдоконгруэнцию будем называть B-фокальной псевдоконгруэнцией (или фокальной псевдоконгруэнцией B), если ее фокальные поверхности не вырождаются, а гауссовы кривизны K_1 и K_2 последних равны между собой и равны взятой с противоположным знаком обратной величине квадрата расстояния d между граничными точками образующей, т. е. если

$$K_1=K_2=-\frac{1}{d^2}. \tag{0.1}$$

Фокальная псевдоконгруэнция является C-фокальной псевдоконгруэнцией в R_4, если ее полный и средний параметры распределения постоянны [2].

Нами найдены условия, которые выделяют B-фокальные псевдоконгруэнции среди фокальных псевдоконгруэнций, и доказано существование нормальной B-фокальной псевдоконгруэнции. Оказывается, что классы нормальных B-фокальных псевдоконгруэнций и нормальных C-фокальных псевдоконгруэнций совпадают.

§ 1. B-фокальная псевдоконгруэнция

К каждой образующей фокальной псевдоконгруэнции V_3 в R_4 присоединяем ортонормированный подвижный репер таким же образом, как и в статье [3], т. е. начальная точка M репера помещается в центр образующей, единичный (при $^0R_4$) или мнимо-единичный (при $^1R_4$) вектор $\mathbf{e}_0$ направляется вдоль прямолинейной образующей, единичный вектор $\mathbf{e}_3$ — вдоль нормали к поверхности V_3, единичные векторы $\mathbf{e}_i$ ($i = 1, 2$) выбираются касательными к распределительным подповерхностям. При таком выборе подвижного репера фокальная псевдоконгруэнция определяется системой

$$\omega^3=0, \quad \omega_0^1=t\omega^2, \quad \omega_1^3=f\omega^1+c\omega^2,$$
$$\omega_0^3=0, \quad \omega_0^2=u\omega^1, \quad \omega_2^3=c\omega^1+\frac{t}{u}f\omega^2 \tag{1.1}$$

пфаффовых уравнений (см. (1.3) в [3], там же приведены продолженные системы (1.4) и (1.7)). Первая продолженная система имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\omega_1^2=\sigma\omega^1+\tau\omega^2,\\
&t\omega^0=\mu\omega^1+\nu\omega^2,\\
&dt=[u\nu-(t+u)\tau]\omega^1+\vartheta\omega^2,\\
&du=\varphi\omega^1+[u\mu+(t+u)\sigma]\omega^2,\\
&df=\left(\xi-\frac{u}{t}c\mu\right)\omega^1+\left[\pi+\left(2\tau-\frac{u}{t}\nu\right)c\right]\omega^2,\\
&dc=\left(\pi-f\mu+\frac{t-u}{u}f\sigma\right)\omega^1+\left(\frac{t}{u}\xi-\frac{tf}{u^2}\varphi+2c\sigma-2f\tau\right)\omega^2.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

При выборе канонического репера предполагалось [3], что фокальная псевдоконгруэнция не является ни изотропной (т. е. $t+u\neq 0$), ни цилиндрической (т. е. $tu\neq 0$). Величины t, u, f, c являются величинами первого, а σ, τ, μ, ν, φ, ϑ, ξ, π — величинами второго порядка. Между вторичными формами ω_J^I $(I, J, K, \ldots = 0, 1, 2, 3)$ имеют место соотношения

$$\omega_0^0=0, \quad \omega_b^a=-\omega_a^b, \quad \omega_a^0=\varepsilon\omega_0^a, \quad \mathbf{e}_0^2=\varepsilon \quad (a, b, c, \ldots=1, 2, 3), \tag{1.3}$$

где в пространстве ${}^0R_4$ $\varepsilon=-1$ и в ${}^1R_4$ $\varepsilon=1$.

Точка $\mathbf{P}=\mathbf{M}+\lambda\mathbf{e}_0$ на образующей фокальной псевдоконгруэнции является точкой сжатия линейчатой подповерхности фокальной псевдоконгруэнции, если $\lambda=-\dfrac{d\mathbf{M}\,d\mathbf{e}_0}{d\mathbf{e}_0^2}$.

Точки P_1 и P_2, соответствующие экстремальным значениям параметра λ, являются граничными точками образующей фокальной псевдоконгруэнции V_3 в R_4 [4]. Расстояние d между граничными точками фокальной псевдоконгруэнции определяется формулой [5]

$$d^2=\frac{(t+u)^2}{t^2u^2}. \tag{1.4}$$

Гауссовы кривизны [6] фокальных поверхностей на основании результатов, полученных в предыдущей работе [3], можно представить в виде

$$K_1=\frac{G_1+G_2}{E_1+E_2}, \quad K_2=\frac{G_1-G_2}{E_1-E_2}, \tag{1.5}$$

где

$$\begin{aligned}
E_1&=\frac{\sqrt{t+u}}{2\sqrt{tu}}\left(-\frac{1}{u\sqrt{u}}\varphi+\frac{t+u}{t\sqrt{u}}\tau-\frac{3\sqrt{u}}{t}\nu\right),\\
E_2&=\frac{\sqrt{t+u}}{2\sqrt{tu}}\left(\frac{1}{t\sqrt{t}}\vartheta+\frac{t+u}{u\sqrt{t}}\sigma-\frac{3}{\sqrt{t}}\mu\right),
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$G_1=\frac{\sqrt{t+u}}{2\sqrt{tu}}(t\sqrt{t}\,\varphi+3u\sqrt{t}(t+u)\tau-u^2\sqrt{t}\,\nu),$$
$$G_2=\frac{\sqrt{t+u}}{2\sqrt{tu}}[-u\sqrt{u}\,\vartheta+3t\sqrt{u}(t+u)\sigma+tu\sqrt{u}\,\mu]. \tag{1.7}$$

Здесь предполагается, что главные формы фокальных поверхностей являются линейно независимыми, т. е.

$$\Delta=E_1+E_2\neq 0, \quad {}^*\Delta=E_1-E_2\neq 0. \tag{1.8}$$

Соотношения (0.1) в силу (1.4)—(1.5) выражаются следующим образом:

$$E_1G_2=E_2G_1,$$
$$E_1+E_2+d^2(G_1+G_2)=0,$$

или

$$\frac{\sqrt{u}}{t\sqrt{t}}\left(\tau-\frac{u}{t+u}\nu\right)\vartheta+\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{u}}\left(\frac{1}{u}\sigma+\frac{1}{t+u}\mu\right)\varphi+\frac{2\sqrt{u}}{\sqrt{t}}(\sigma\nu+\mu\tau)=0, \tag{1.9}$$

$$(t+u)(\sqrt{t}\,\sigma+\sqrt{u}\,\tau)+u(\sqrt{t}\,\mu-\sqrt{u}\,\nu)=0. \tag{1.10}$$

Условия (1.7)—(1.8) выделяют из фокальных псевдоконгруэнций B-фокальные псевдоконгруэнции. Однако они чрезмерно сложны для дальнейшего применения. Их можно значительно упростить, если ввести дополнительно условия нормальности [7, 5]. Нормальные B-фокальные псевдоконгруэнции мы и рассмотрим ниже.

§ 2. Нормальная B-фокальная псевдоконгруэнция в R_4

Фокальная псевдоконгруэнция V_3 в пространстве R_4 является нормальной псевдоконгруэнцией, если существует хотя бы одна двумерная поверхность, ортогонально пересекающая все образующие. Условие нормальности равносильно требованию, чтобы уравнение $\omega^0=0$ было вполне интегрируемым, т. е. в силу (1.1), (1.3) [7]

$$t=u, \tag{2.1}$$

откуда при дифференцировании на основании (1.2) получаем

$$\varphi=t(\nu-2\tau), \quad \vartheta=t(\mu+2\sigma). \tag{2.2}$$

Нормальная фокальная псевдоконгруэнция, если учесть соотношения (2.1)—(2.2), определяется следующей пфаффовой системой:

$$\omega^3=0, \quad \omega_0^1=t\omega^2, \quad \omega_1^3=f\omega^1+c\omega^2,$$
$$\omega_0^3=0, \quad \omega_0^2=t\omega^1, \quad \omega_2^3=c\omega^1+f\omega^2, \tag{2.3}$$

а первая продолженная система принимает вид

$$\omega_1^2=\sigma\omega^1+\tau\omega^2,$$
$$t\omega^0=\mu\omega^1+\nu\omega^2,$$

$$\begin{aligned} d\ln t &= (\nu-2\tau)\,\omega^1+(\mu+2\sigma)\,\omega^2, \\ df &= (\xi-c\mu)\,\omega^1+[\pi+c\,(2\tau-\nu)\,]\,\omega^2, \\ dc &= (\pi-f\mu)\,\omega^1+(\xi+2c\sigma-f\nu)\,\omega^2. \end{aligned} \tag{2.4}$$

Напомним, что фокальная псевдоконгруэнция является C-фокальной псевдоконгруэнцией в R_4, если ее полный и средний параметры распределения постоянны. Это равносильно требованию, чтобы $t=\text{const}$, $u=\text{const}$ [2]. Нормальная фокальная псевдоконгруэнция является нормальной C-фокальной псевдоконгруэнцией, если (см. (2.1))

$$t=\text{const}. \tag{2.5}$$

Покажем, что имеет место следующая

Теорема. *Каждая нормальная B-фокальная псевдоконгруэнция с невырожденными фокальными поверхностями в R_4 является нормальной C-фокальной псевдоконгруэнцией и определяется с произволом четырех функций одного аргумента.*

Доказательство. Учитывая соотношения (1.10) и (1.11), найдем из (1.7), (1.8) условия, выделяющие нормальную B-фокальную псевдоконгруэнцию из фокальных псевдоконгруэнций

$$\begin{aligned} \sigma\nu+\tau\mu &= 0, \\ 2(\sigma+\tau)+\mu-\nu &= 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Если из второго уравнения системы (2.2) найти ν и подставить в первое, то получим

$$\begin{aligned} (2\sigma+\mu)\,(\sigma+\tau) &= 0, \\ \nu &= 2\,(\sigma+\tau)+\mu. \end{aligned} \tag{2.6′}$$

Подчеркнем, что соотношения (2.6′) соблюдаются, если существует нормальная B-фокальная псевдоконгруэнция. Таким образом, система (2.6) дает два решения

$$1)\quad \mu=\nu,\qquad \sigma=-\tau, \tag{2.7}$$
$$2)\quad \mu=-2\sigma,\qquad \nu=2\tau. \tag{2.8}$$

В первом случае из соотношений (1.5)—(1.8) в силу (2.1), (2.2) получим, что $\Delta=0$, т. е. главные формы первой фокальной поверхности являются линейно зависимыми. Поэтому этот случай, как случай фокальных псевдоконгруэнций с вырожденными фокальными поверхностями, рассматривать не будем.

Во втором случае из системы (2.4) в силу (2.8) следует, что $dt=0$, т. е. $t=\text{const}$, и поэтому нормальная B-фокальная псевдоконгруэнция принадлежит к классу нормальных C-фокальных псевдоконгруэнций. Наоборот, если $t=\text{const}$, то из системы (2.4) следуют соотношения (2.8). Таким образом доказано первое утверждение теоремы.

Докажем теперь существование нормальной B-фокальной псевдоконгруэнции.

При внешнем дифференцировании системы (2.3) в силу (2.5) получим систему

(1) $(-2t\omega_1^2+t^2\omega^0)\wedge\omega^1=0,$
(2) $(2t\omega_1^2+t^2\omega^0)\wedge\omega^2=0,$
(3) $(df-2c\omega_1^2+ct\omega^0)\wedge\omega^1+(dc+tf\omega^0)\wedge\omega^2=0,$
(4) $(dc-tf\omega^0)\wedge\omega^1+(df+2c\omega_1^2+ct\omega^0)\wedge\omega^2=0,$

на основании которой составим следующую таблицу для нахождения числа Картана.

	ω_1^2	ω^0	dc	df
(1)	$-2tx_1$	t^2x_1	0	0
(2)	$2tx_2$	t^2x_2	0	0
(3)	$-2cx_1$	ctx_1+tfx_2	x_2	x_1
(4)	$2cx_2$	tfx_1+ctx_2	x_1	x_2

Ранг s_1 матрицы, составленной из элементов этой таблицы, равен 4 и число Картана $Q=4$.

Продолженная система (2.4) в силу (2.5) и (2.8) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
&\omega_1^2=\sigma\omega^1+\tau\omega^2,\\
&t\omega^0=-2\sigma\omega^1+2\tau\omega^2,\\
&df=(\xi+2c\sigma)\,\omega^1+\pi\omega^2,\\
&dc=(\pi+2f\sigma)\,\omega^1+[\xi+2(c\sigma-f\tau)]\omega^2.
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Число новых неизвестных величин второго порядка в системе (2.9) $N=4$. Следовательно, система (2.3), (2.4) находится в инволюции [8], нормальная B-фокальная (C-фокальная) псевдоконгруэнция существует и определяется с произволом четырех функций одного аргумента. Теорема доказана.

Наконец, выразим гауссовы кривизны и кручения фокальных поверхностей нормальной B-фокальной псевдоконгруэнции. В силу (1.4)—(1.7), (2.1), (2.2) и (2.8) они принимают соответственно следующий вид:

$$K_1=K_2=-\frac{t^2}{4},$$

$$\varkappa_1=-\frac{t(f+c)(\sigma-\tau)}{4(\sigma+\tau)},\quad \varkappa_2=\frac{t(f-c)(\sigma+\tau)}{4(\sigma-\tau)}.$$

Фокальная псевдоконгруэнция является псевдосферической фокальной псевдоконгруэнцией в R_4, если фокальные поверхности являются псевдосферами, т. е. поверхностями отрицательной постоянной гауссовой кривизны [2].

Следовательно, в силу (2.5) нормальная B-фокальная псевдоконгруэнция является псевдосферической.

ЛИТЕРАТУРА

1. Фиников С. П., Теория конгруэнций. М.—Л., 1948.
2. Туулметс Л. А., Тамм Э., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 21, 370 (1972).
3. Туулметс Л. А., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, № 305, 41 (1972).
4. Лумисте Ю. Г., Матем. сб., 50 (92), № 2, 203 (1960).
5. Туулметс Л. А., Некоторые классы линейчатых гиперповерхностей V_3 в евклидовом пространстве R_4, Дисс. канд. физ.-матем. н., Тарту, 1966.

6. Риманова геометрия в ортогональном репере, М., 1960.
7. Туулметс Л. А., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, № 150, 109 (1964).
8. Фиников С. П., Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, М.—Л., 1948.

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию
6/III 1972

LEIDA TUULMETS, H. OIDJÄRV

B-FOKAALNE JA NORMAALNE *B*-FOKAALNE PSEUDOKONGRUENTS RUUMIS R_4

Fokaalne pseudokongruents B neljamõõtmelises eukleidilises ruumis R_4 (mis võib olla kas päriseukleidiline ruum ${}^0R_4$ või pseudoeukleidiline ruum ${}^1R_4$) defineeritakse analoogiliselt kongruentside teoorias esinevale vastava klassi definitsioonile ruumis R_3.

Fokaalset pseudokongruentsi eukleidilises ruumis R_4 hakkame nimetama B-fokaalseks pseudokongruentsiks (või fokaalseks pseudokongruentsiks B), kui tema 1) fokaalpindade Gaussi kõverused on võrdsed ja nende ühiseks väärtuseks on piirpunktide vahelise kauguse ruudu negatiivne pöördväärtus ja 2) fokaalpinnad on mittekidunud. Fokaalset pseudokongruentsi nimetatakse fokaalseks pseudokongruentsiks C ruumis R_4, kui tema täis- ja keskmine jaotusparameeter on konstantsed [2].

Artiklis tuletatakse B-fokaalset pseudokongruentsi määravad tingimused. Põhjalikumalt uuritakse normaalset fokaalset pseudokongruentsi B. Tõestatakse, et normaalse fokaalse pseudokongruentsi klassid B ja C ühtivad, näidatakse nende olemasolu ning uuritakse geomeetrilisi omadusi.

LEIDA TUULMETS, H. OIDJÄRV

B-FOCAL AND NORMAL *B*-FOCAL PSEUDOCONGRUENCE IN SPACE R_4

Focal pseudocongruence B in space R_4 (proper Euclidean space ${}^0R_4$ or pseudo-Euclidean space ${}^1R_4$) has been defined in the same way as the corresponding class of the congruences in space R_3.

The focal pseudocongruence in the Euclidean space R_4 will be called focal pseudocongruence B if focal surfaces (i) have a common Gaussian curvature value being equal to the negative reciprocal distance square between the limit points of the focal pseudocongruence, and (ii) are not degenerated. If the total and average distribution parameters of focal pseudocongruence are constant, the focal pseudocongruence is called focal pseudocongruence C.

The conditions determining the B-focal pseudocongruence have been derived. The normal focal pseudocongruence B has been more thoroughly investigated. It has been proved that the classes B and C of the normal focal pseudocongruence coincide. Their existence has been shown and some of their geometrical properties have been investigated.