EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.4.02

УДК 517.4

В. ШТРАУС

О СПЕКТРАЛЬНОМ РАЗЛОЖЕНИИ Q-НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРАВИЛЬНЫХ $(\mathfrak{B}, Q)$-ПРОСТРАНСТВАХ

1. $(\mathfrak{B}, Q)$-*пространством* мы называем произвольное комплексное банахово пространство $\mathfrak{B}$ с заданной на нем непрерывной эрмитово-билинейной формой $Q(x, y)$. В этом случае для формы $Q(x, y)$ определен непрерывный оператор Грама G, задаваемый на всем $\mathfrak{B}$ равенством $(Gx)(y) = Q(x, y)$ и действующий из $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{B}^{\#}$, где $\mathfrak{B}^{\#}$ — пространство всех непрерывных антилинейных на $\mathfrak{B}$ функционалов с обычной нормой. $(\mathfrak{B}, Q)$-пространство будем называть *правильным*, если найдется такая константа $c > 0$, что для любого $x \in \mathfrak{B}$ справедливо неравенство *

$$\operatorname*{Sup}_{\|y\| \leqslant 1} |Q(x, y)| \geqslant c\,\|x\|. \tag{1}$$

Как нетрудно видеть, из неравенства (1) следует, что оператор Грама G формы Q ограниченно обратим на $\mathfrak{R}(G)$, где $\mathfrak{R}(G)$ — область значений оператора G.

Рассмотрим предложения, которые нам понадобятся для формулировки основных теорем.

1°. *Если непрерывная эрмитово-билинейная форма $Q(x, y)$, заданная на банаховом пространстве $\mathfrak{B}$, такова, что $Q(x, x) \geqslant 0$ для любого $x \in \mathfrak{B}$, то для ее оператора Грама справедливо неравенство*

$$\|Gx\|^2 \leqslant \|G\|\, Q(x, x), \tag{2}$$

где x — произвольный вектор из $\mathfrak{B}$.

Доказательство этого утверждения легко получить из соотношения $\|Gx\|^2 = \operatorname*{Sup}_{\|y\| \leqslant 1} |Q(x, y)|^2$ и неравенства Коши—Буняковского—Шварца, справедливого для формы $Q(x, y)$.

2°. *Пусть на банаховом пространстве $\mathfrak{B}$ заданы две непрерывные эрмитовы формы $Q_1(x, y)$ и $Q_2(x, y)$, причем $|Q_2(x, x)| \leqslant Q_1(x, x)$ для любого вектора x из $\mathfrak{B}$. Тогда $\mathfrak{R}(G_2) \subset \overline{\mathfrak{R}(G_1)}$, где G_1 и G_2 — операторы Грама соответствующих форм, $\overline{\mathfrak{R}(G_1)}$ — замыкание множества $\mathfrak{R}(G_1)$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}/\mathrm{Ker}\, G_1$ — фактор-пространство $\mathfrak{B}$ по ядру оператора G_1, I — каноническое отображение $\mathfrak{B}$ в $\mathfrak{M}$. Для

* Частным случаем указанных пространств являются $(\mathfrak{B}, Q)$-пространства с самоассоциированной нормой, рассмотренные Н. Ароншайном [1].

$X, Y \in \mathfrak{M}$ положим $(X, Y) = Q_1(x, y)$, где x и y таковы, что $X = Ix$, $Y = Iy$. Полученное предгильбертово пространство дополним до гильбертова пространства $\mathfrak{H}$.

Положим

$$\mathfrak{D}_A = \mathfrak{M}, \quad AX = G_1x \quad (X = Ix),$$

где $\mathfrak{D}_A$ — область определения оператора A. Из неравенства (2) получим, что оператор A ограничен. Пусть $\bar{A}$ — замыкание оператора A. Тогда $\mathfrak{D}_{\bar{A}} = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{R}(\bar{A}) \subset \overline{\mathfrak{R}(G_1)}$. Далее определим в $\mathfrak{H}$ форму $Q(X, Y)$ следующим образом: для $X, Y \in \mathfrak{M}$ положим $Q(X, Y) = Q_2(x, y)$ $(X = Ix$, $Y = Iy)$, а затем расширим область определения формы по непрерывности на все $\mathfrak{H}$. Пусть $G: \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ — оператор Грама этой формы. Тогда $G_2x = \bar{A}GIx$ и, следовательно, $\mathfrak{R}(G_2) \subset \mathfrak{R}(\bar{A})$. Предложение доказано.

2. Оператор ** $A: \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$, заданный всюду в $(\mathfrak{B}, Q)$-пространстве, будем называть *Q-самосопряженным*, если $Q(Ax, y) = Q(x, Ay)$, и *Q-неотрицательным*, если $Q(Ax, x) \geqslant 0$, где x и y — произвольные векторы из $\mathfrak{B}$.

3°. *Пусть в правильном $(\mathfrak{B}, Q)$-пространстве задана последовательность равномерно ограниченных операторов $\{A_n\}_1^\infty$ таких, что разность $A_{n+1} - A_n$ является Q-неотрицательным оператором при любом $n = 1, 2, \ldots$. Тогда последовательность $\{A_n\}_1^\infty$ сильно сходится.*

Доказательство. Заметим, что в условиях предложения 3° из неравенства (2) следует

$$\|(A_{n+1} - A_n)x\|^2 \leqslant CQ([A_{n+1} - A_n]x, x) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где x — произвольный вектор из $\mathfrak{B}$, $C = 2\|G^{-1}\|^2\|G\| \sup\limits_{n=1,2,\ldots} \{\|A_n\|\}$. Для завершения доказательства остается заметить, что последовательность $\{Q(A_nx, x)\}_1^\infty$ сходится при любом x.

Операторнозначную функцию E_λ $(-\infty < \lambda < \infty,\ \lambda \neq \mu)$ будем называть *Q-ортогональным разложением единицы с критической точкой* μ, если

а) E_λ — Q-самосопряженный проектор $(\lambda \neq \mu)$;
б) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} E_\lambda = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to \infty} E_\lambda = I$, $E_{\lambda-0} = E_\lambda$ $(\lambda \neq \mu)$;
в) $E_\lambda E_\nu = E_\nu E_\lambda = E_\lambda$ $(\lambda \leqslant \nu,\ \lambda \neq \mu,\ \nu \neq \mu)$.

Сформулируем теперь основную теорему настоящей статьи, обобщающую одно утверждение об операторах в J-пространствах (см., напр., [2], § 2).

Теорема 1. *Всякий Q-неотрицательный оператор A, действующий в правильном $(\mathfrak{B}, Q)$-пространстве, представим в виде*

$$A = S + \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE_\lambda, \tag{3}$$

где а) E_λ — *Q-ортогональное разложение единицы с критической точкой* $\mu = 0$;
б) S — *Q-неотрицательный оператор*, $S^2 = 0$;
в) $S(E_{\lambda_1} - E_{\lambda_2}) = (E_{\lambda_1} - E_{\lambda_2})S = 0$ $(\lambda_2 \leqslant \lambda_1,\ \mu \bar{\in} [\lambda_2, \lambda_1])$.

** В работе рассматриваются только линейные ограниченные операторы.

Доказательство этой теоремы в общих чертах повторяет приведенное в [2] доказательство упомянутого выше утверждения о спектральном разложении J-неотрицательного оператора. Поэтому мы не приводим его полностью.

Рассуждая так же, как и в [2], приходим к выводу, что при любых $x, y \in \mathfrak{B}$ имеет место следующее представление:

$$Q(A^{n+1}x, y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^n \, d\sigma_\lambda(x, y) \qquad (n=0,\ 1,\ \ldots), \tag{4}$$

где $\sigma_\lambda(x, y)$ — эрмитова форма при любом фиксированном λ; $\sigma_\lambda(x, x)$ — неубывающая функция по λ, $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} \sigma_\lambda(x, x) = 0$;

$$\sigma_\lambda(x, x) = \frac{1}{2}[\sigma_{\lambda-0}(x, x) + \sigma_{\lambda+0}(x, x)], \quad 0 \leqslant \sigma_\lambda(x, x) \leqslant Q(Ax, x).$$

Пусть G_λ и G_1 — операторы Грама форм $\sigma_\lambda(x, y)$ и $Q_1(x, y) = Q(Ax, y)$ соответственно. Из 2° получаем, что $\mathfrak{R}(G_\lambda) \subset \overline{\mathfrak{R}(G_1)} \subset \overline{\mathfrak{R}(G)} = \mathfrak{R}(G)$. Поэтому при любом λ определен и непрерывен оператор $F_\lambda = G^{-1}G_\lambda$. Как нетрудно видеть, F_λ есть Q-неубывающая функция от λ. Поэтому из предложения 3° и равенств (4) получаем, что имеет место сходящееся в сильном смысле представление

$$A^n = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda^{n-1} \, dF_\lambda \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{5}$$

Переход от представления (5) к представлению (3) осуществляется по той же схеме, что и в [2]. Теорема доказана.

Используя приведенные выше предложения, можно также показать, что для операторов в правильных $(\mathfrak{B}, Q)$-пространствах справедлива следующая теорема, обобщающая один результат Р. Кюне [3].

Теорема 2. *Пусть Q-самосопряженный оператор A, действующий в правильном $(\mathfrak{B}, Q)$-пространстве, таков, что для произвольного вектора $0 \neq x \in \mathfrak{B}$ из равенства $Q(x, x) = 0$ следует, что $Q(Ax, x) > 0$, и, кроме того, пусть некоторая положительная степень оператора A вполне непрерывна. Тогда найдется Q-ортонормированная система $\{x_k\}_1^\alpha \subset \mathfrak{B}$ (т. е. $Q(x_k, x_j) = \pm\delta_{kj}$), где $\alpha \leqslant \infty$, такая, что для любого $x \in \mathfrak{B}$ имеет место следующее, сходящееся по норме представление:*

$$Ax = \sum_{k=1}^{\alpha} \lambda_k Q(x_k, x_k)\, Q(x, x_k)\, x_k.$$

Автор приносит искреннюю благодарность И. С. Иохвидову за постановку задач и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аронштайн Н., Квадратичные формы на векторных пространствах, в сб.: Математика, 8, № 5, 105 (1964).
2. Крейн М. Г., Шмульян Ю. Л., J-полярное представление *плюс*-операторов, в сб.: Математические исследования, 1, вып. 2, Кишинев, 1966, 172.
3. Kühne R., Über eine Klasse J-selbstadjungierter Operatoren, Math. Ann., **154**, 56 (1964).

Воронежский государственный университет им. Ленинского комсомола

Поступила в редакцию 15/III 1972

V. STRAUS

Q-MITTENEGATIIVSETE OPERAATORITE LAHUTUSEST REGULAARSETES ($\mathfrak{B}$, Q)-RUUMIDES

Regulaarseks ($\mathfrak{B}$, Q)-ruumiks nimetame kompleksset Banachi ruumi $\mathfrak{B}$ koos sellel määratud pideva bilineaarse vormiga, mis rahuldab tingimusi $Q(x, y) = \overline{Q(y, x)}$. $\sup_{\|y\| \leqslant 1} |Q(x, y)| \geqslant c\|x\|$ ($c = \text{const} > 0$). Pidevat lineaarset operaatorit $A: \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ nimetame Q-mittenegatiivseks, kui $Q(Ax, x) \geqslant 0$ iga $x \in \mathfrak{B}$ korral.

Artiklis üldistatakse regulaarsetes ($\mathfrak{B}, Q$)-ruumides tegutsevate Q-mittenegatiivsete operaatorite kohta mõned tuntud teoreemid (vt. näiteks [2, 3] J-mittenegatiivsete operaatorite lahutusest J-ruumides indefiniitse meetrikaga Hilberti ruumides).

V. SHTRAUS

ON SPECTRAL DECOMPOSITION OF Q-NON-NEGATIVE OPERATORS IN REGULAR ($\mathfrak{B}, Q$)-SPACES

By a regular ($\mathfrak{B}$, Q)-space we mean a complex Banach space $\mathfrak{B}$ together with a continuous hermitian-bilinear form $Q(x, y)$ (i. e. $Q(x, y) = \overline{Q(y, x)}$, $Q(\alpha x + \beta y, z) = \alpha Q(x, z) + \beta Q(y, z)$, $x, y, z \in \mathfrak{B}$), such that for every $x \in \mathfrak{B}$: $\sup_{\|y\| \leqslant 1} |Q(x, y)| \geqslant c\|x\|$, $c = \text{const} > 0$.

A continuous linear operator $A: \mathfrak{B} \to \mathfrak{B}$ is said to be Q-non-negative if the inequality $Q(Ax, x) \geqslant 0$ is true for every $x \in \mathfrak{B}$.

In the present paper we generalize to the Q-non-negative operators in the regular ($\mathfrak{B}, Q$)-spaces some well-known theorems (see, for instance [2, 3]) about the spectral decomposition of J-non-negative operators in (Hilbert) J-spaces.