EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 21. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1972, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 21
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1972, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1972.4.01

УДК 519.271/272

ЕЛЕНА РООС

ПРЕДЕЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ ВСЕГО ПРОШЛОГО ПРОЦЕССА

В работе рассматривается предельное поведение распределения неустойчивого решения стохастического дифференциального уравнения, коэффициенты которого в отличие от диффузионного уравнения зависят от всего прошлого процесса, что позволяет более точно отражать реальный физический смысл описываемых этим уравнением явлений. Выводится явный вид этого предельного распределения. Зависимость от прошлого вводится через специальный функционал от траектории процесса до настоящего времени. До сих пор были исследованы лишь стационарные решения уравнения такого типа [1].

Основные идеи доказательства можно найти в работах [2–4], где они были использованы при исследовании предельного поведения распределений решения стохастического диффузионного уравнения.

Пусть имеется стохастическое дифференциальное уравнение

$$d\xi(t)=a(t,g(\xi(t)),\xi(t))dt+\sigma(t,g(\xi(t)),\xi(t))dw(t),\tag{1}$$

где $t\geqslant 0$; $a(t,x,y)$, $\sigma(t,x,y)$ — действительные функции; $g(\xi(t))$ — функционал от траекторий процесса $\xi(t)$; $w(t)$ — процесс броуновского движения, заданный на вероятностном пространстве (Q,F,P); $\xi(0)$ — случайная величина, не зависимая от $w(t)$.

Докажем сперва теорему о существовании и единственности решения уравнения (1).

Теорема 1. *Если* 1) *выполняются условия Липшица для коэффициентов* $a(t,x,y)$ *и* $\sigma(t,x,y)$ *уравнения* (1), *т. е. существуют такие постоянные* K_1 *и* K_2, *что для любых действительных* x_1, x_2, y_1, y_2 *выполняются неравенства*

$$|a(t,x_1,y_1)-a(t,x_2,y_2)|\leqslant K_1|x_1-x_2|+K_2|y_1-y_2|,\tag{2}$$
$$|\sigma(t,x_1,y_1)-\sigma(t,x_2,y_2)|\leqslant K_1|x_1-x_2|+K_2|y_1-y_2|,\tag{3}$$

и если 2) $g(\psi(t))$ — *аддитивный функционал, заданный на пространстве непрерывных функций* $\psi(s)$, $0\leqslant s\leqslant t$, *с нормой*

$$\|\psi(t)\|=\left(\int_0^t\psi^2(s)\,ds\right)^{1/2},\tag{4}$$

то уравнение (1) *имеет единственное решение.*

Доказательство. Пусть решение ищется методом последовательных приближений:

$$\xi_1(t)=\xi(0)+\int_0^t a(s,g(\xi(0)),\xi(0))\,ds+\int_0^t \sigma(s,g(\xi(0)),\xi(0))\,dw(s),$$

$$\xi_2(t)=\xi_1(t)+\int_0^t a(s,g(\xi_1(s)),\xi_1(s))\,ds+\int_0^t \sigma(s,g(\xi_1(s)),\xi_1(s))\,dw(s),$$

. . . .

$$\xi_n(t)=\xi_{n-1}(t)+\int_0^t a(s,g(\xi_{n-1}(s)),\xi_{n-1}(s))\,ds+$$

$$+\int_0^t \sigma(s,g(\xi_{n-1}(s)),\xi_{n-1}(s))\,dw(s),$$

. . . .

Здесь $\xi(0)$ — случайная величина, не зависимая от $w(t)$, как было обусловлено ранее.

Вопрос о сходимости последовательности приближений $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, ..., $\xi_n(t)$ равносилен вопросу о сходимости ряда $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(\xi_{k+1}(t)-\xi_k(t))$. Но такой ряд сходится. В самом деле,

$$M[\xi_{n+1}(t)-\xi_n(t)]^2\leqslant 2t\int_0^t M[a(s,g(\xi_n(s)),\xi_n(s))-$$

$$-a(s,g(\xi_{n-1}(s)),\xi_{n-1}(s))]^2ds+2\int_0^t M[\sigma(s,g(\xi_n(s)),\xi_n(s))-$$

$$-\sigma(s,g(\xi_{n-1}(s)),\xi_{n-1}(s))]^2ds$$

и в силу свойства стохастического интеграла

$$M[\int_0^T f(s)\,dw(s)]^2=\int_0^T M^2(t)\,dt.$$

Далее, из условия теоремы следует, что

$$|a(t,g(\psi_n(t)),x)-a(t,g(\psi_{n-1}(t)),y)|\leqslant K_1|g(\psi_n(t))-g(\psi_{n-1}(t))|+$$
$$+K_2|x-y|=K_1|g(\psi_n(t)-\psi_{n-1}(t))|+K_2|x-y|;$$

$$|g(\psi(t))|\leqslant C\|\psi(t)\|=C(\int_0^t \psi^2(s)\,ds)^{1/2}.$$

Итак,

$$M[\xi_{n+1}(t)-\xi_n(t)]^2\leqslant\int_0^t(K_1t+C_1)M|g(\xi_n(s))-g(\xi_{n-1}(s))|^2ds+$$

$$+\int_0^t(K_2t+C_2)M|\xi_n(s)-\xi_{n-1}(s)|^2ds=I_1+I_2.$$

Интегралы I_1 и I_2 оцениваются аналогично.

$$\int_0^t M|g(\xi_n(s))-g(\xi_{n-1}(s))|^2ds=\int_0^t M|g(\xi_n(s)-\xi_{n-1}(s))|^2ds\leqslant$$

$$\leqslant K\int_0^t M\|\xi_n(s)-\xi_{n-1}(s)\|^2 ds \leqslant K\int_0^t M\{\int_0^s |\xi_n(u)-\xi_{n-1}(u)|^2 du\} ds \leqslant$$

$$\leqslant Kt\int_0^t M|\xi_n(u)-\xi_{n-1}(u)|^2 du,$$

следовательно,

$$M|\xi_n(t)-\xi_{n-1}(t)|^2 \leqslant N\int_0^t M|\xi_n(s)-\xi_{n-1}(s)|^2 ds.$$

Введя обозначение

$$\alpha_n(t)=M|\xi_{n+1}(t)-\xi_n(t)|,$$

можно без труда показать, что

$$\alpha_n(t)\leqslant(K_1t+K_2)\int_0^t \alpha_{n-1}(s)\,ds \leqslant \frac{(K_1t+K_2)^n}{n!}t^nC;\quad t\in[0,T]. \qquad (\alpha)$$

Учитывая эту оценку, можно утверждать, что

$$[\xi_n(t)-\xi_{n-1}(t)]\to 0,\ n\to\infty,\ \text{с вероятностью } 1.$$

Следовательно, последовательность приближений $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$, ..., $\xi_n(t)$, ... сходится к пределу $\xi(t)$, который, как легко убедиться, удовлетворяет уравнению (1). Итак, $\xi(t)$ — решение уравнения (1).

Остается показать, что $\xi(t)$ — единственное решение этого уравнения.

Пусть существуют два различных решения уравнения (1) — $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$. Тогда

$$M[\xi_1(t)-\xi_2(t)]^2 \leqslant 2t\int_0^t M[a(s,g(\xi_1(s)),\xi_1(s))-a(s,g(\xi_2(s)),\xi_2(s))]^2 ds+$$

$$+2\int_0^t M[\sigma(s,g(\xi_1(s)),\xi_1(s))-\sigma(s,g(\xi_2(s)),\xi_2(s))]^2 ds \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^t (K_1t+C_1)M|g(\xi_1(s))-g(\xi_2(s))|^2 ds+$$

$$+\int_0^t (K_2t+C_2)M|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2 ds = I'_1+I'_2.$$

Величины же I'_1 и I'_2 оцениваются совершенно аналогично I_1 и I_2. Следовательно,

$$M|\xi_1(t)-\xi_2(t)|^2 \leqslant N\int_0^t M|\xi_1(s)-\xi_2(s)|^2 ds.$$

Воспользовавшись снова оценкой (α), можно получить

$$\xi_1(t)=\xi_2(t)$$

с вероятностью 1. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь предельное поведение распределения решения уравнения (1).

Теорема 2. *Пусть* $\xi(t)$ — *решение уравнения* (1). *Если существуют такие функции* $a(x)$ *и* $\sigma(x)$, *что*

1) $|a(t,y,x)-a(x)|\leqslant\varphi_1(t)$, (5)

$|\sigma^2(t,y,x)-\sigma^2(x)|\leqslant\varphi_2(t)$, (6)

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t\varphi_i(s)\,ds=0,\quad i=1,\ 2;\quad и$$

2) $$\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\frac{a(x)}{\sigma^2(x)}-\frac{1}{2}\frac{\sigma'(x)}{\sigma(x)}\right]dx=\lambda, \tag{7}$$

то распределение случайной величины $f(\xi(t))/\sqrt{t}$, *где*

$$f(x)=\int_0^x\exp\left\{-2\int_0^u\frac{a(v)}{\sigma^2(v)}\,dv\right\}du, \tag{8}$$

сходится при $t\to\infty$ *к распределению с плотностью*

$$\varrho(t,x)=\begin{cases}\dfrac{2}{a+1}\,\dfrac{1}{a\sqrt{2\pi t}}\,e^{-x^2/2a^2t}, & x>0;\\[2ex] \dfrac{2a}{a+1}\,\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}\,e^{-x^2/2t}, & x<0,\end{cases}$$

где $$a=b(\infty),$$

$$b(y)=\exp\left\{-2\int_0^y\frac{a(v)}{\sigma^2(v)}\,dv\right\}\sigma(y). \tag{9}$$

Доказательство. Для решения $\xi(t)$ уравнения (1) имеет место формула Ито. Это нетрудно показать, воспользовавшись методом работы [5] (см. гл. 2, § 2, теорему 5). Поэтому можно сразу записать

$$d\Phi(\xi(t))=[\Phi'(\xi(t))a(t,g(\xi(t)),\xi(t))+\frac{1}{2}\Phi''(\xi(t))\times$$
$$\times\sigma^2(t,g(\xi(t)),\xi(t))]dt+\Phi'(\xi(t))\sigma(t,g(\xi(t)),\xi(t))\,dw(t),$$

где функция $\Phi(x)$ определена, непрерывна и имеет непрерывные производные $\Phi'(x)$ и $\Phi''(x)$, $x\in(-\infty,\infty)$.

Отсюда следует, что

$$d\Phi(\xi(t))=\Big\{\Phi'(\xi(t))[a(t,g(\xi(t)),\xi(t))+a(\xi(t))-a(\xi(t))]+$$
$$+\frac{1}{2}\Phi''(\xi(t))[\sigma^2(t,g(\xi(t)),\xi(t))+\sigma^2(\xi(t))-\sigma^2(\xi(t))]\Big\}dt+$$
$$+\Phi'(\xi(t))[\sigma(t,g(\xi(t)),\xi(t))+\sigma(\xi(t))-\sigma(\xi(t))]dw(t)=$$
$$=\Big\{\Phi'(\xi(t))a(\xi(t))+\frac{1}{2}\Phi''(\xi(t))\sigma^2(\xi(t))\Big\}dt+$$
$$+\{\Phi'(\xi(t))\times[a(t,g(\xi(t)),\xi(t))-a(\xi(t))]\}dt+ \tag{10}$$

$$+\frac{1}{2}\left\{\Phi''(\xi(t))\times[\sigma^2(t, g(\xi(t)), \xi(t))-\sigma^2(\xi(t))]\right\}dt+$$
$$+\Phi'(\xi(t))\times[\sigma(t, g(\xi(t)), \xi(t))-\sigma(\xi(t))]dw(t)+\Phi'(\xi(t))\sigma(\xi(t))dw(t).$$

Функцию $\Phi(x)$ удобно выбрать таким образом, чтобы

$$\Phi'(x)a(x)+\frac{1}{2}\Phi''(x)\sigma^2(x)=0; \tag{11}$$

решение такого уравнения имеет вид (см. [6], гл. 2, § 5)

$$\Phi(x)=C_1+C_2\int_0^x \exp\left\{-\int_0^z \frac{2a(u)}{\sigma^2(u)}du\right\}dz.$$

Следовательно, в качестве $\Phi(x)$ можно взять функцию

$$f(x)=\int_0^x \exp\left\{-2\int_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv\right\}du. \tag{12}$$

Рассмотрим теперь выражения

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t f'(\xi(s))[a(s, g(\xi(s)), \xi(s))-a(\xi(s))]ds=J_1,$$
$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t f'(\xi(s))[\sigma(s, g(\xi(s)), \xi(s))-\sigma(\xi(s))]dw(s)=J_2,$$
$$\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t f''(\xi(s))[\sigma^2(s, g(\xi(s)), \xi(s))-\sigma^2(\xi(s))]ds=J_3.$$

В силу условия 2 теоремы $f'(x)$ и $f''(x)$ ограничены. Действительно,

$$f'(x)=\exp\left\{-2\int_0^x \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv\right\}; \quad f''(x)=\left[\exp\left\{-2\int_0^x \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv\right\}\times\right.$$
$$\left.\times\left[-2\frac{a(x)}{\sigma^2(x)}\right]\right]=-2\frac{a(x)}{\sigma^2(x)}\exp\left\{-2\int_0^x \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv\right\};$$

с другой стороны,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a(u)}{\sigma^2(u)}du-\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}du=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a(u)}{\sigma^2(u)}du-\frac{1}{2}\int_{\sigma(-\infty)}^{\sigma(+\infty)}\frac{dy}{y}=\lambda;$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a(u)}{\sigma^2(u)}du=\frac{1}{2}\ln y\Big|_{\sigma(-\infty)}^{\sigma(+\infty)}+\lambda;$$
$$\sigma(-\infty)=C_1; \quad \sigma(+\infty)=C_2;$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{a(u)}{\sigma^2(u)}du=\frac{1}{2}\ln\frac{C_1}{C_2}+\lambda=B,$$

где B — некоторая постоянная ($a(x)$ и $\sigma(x)$ ограничены в силу того же условия 2 теоремы). Далее, в силу условия 1 теоремы и ввиду ограниченности $f'(x)$ и $f''(x)$ ($|f'(x)|\leqslant N_1$; $|f''(x)|\leqslant N_2$)

$$J_1\leqslant\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t f'(\xi(s))\varphi_1(s)\,ds\leqslant\frac{N_1}{\sqrt{t}}\int_0^t \varphi_1(s)\,ds, \tag{13}$$

$$J_3\leqslant\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t f''(\xi(s))\varphi_2(s)\,ds\leqslant\frac{N_2}{\sqrt{t}}\int_0^t \varphi(s)\,ds; \tag{14}$$

$$M\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t f'(\xi(s))\left(\sigma(s,g(\xi(s)),\xi(s))-\sigma(\xi(s))\right)dw(s)\right]^2=$$

$$=\frac{1}{t}\int_0^t Mf'^2(\xi(s))\left[\sigma(s,g(\xi(s)),\xi(s))-\sigma(\xi(s))\right]^2 ds.$$

Так как

$$|\sigma^2(t,y,x)-\sigma^2(x)|=|\sigma(t,y,x)-\sigma(x)|\times|\sigma(t,y,x)+\sigma(x)|,$$

то

$$|\sigma(t,y,x)-\sigma(x)|\leqslant|\sigma^2(t,y,x)-\sigma^2(x)|,$$
$$|\sigma(t,y,x)-\sigma(x)|^2\leqslant|\sigma^2(t,y,x)-\sigma^2(x)|^2\leqslant\varphi_2^2(t);$$

следовательно,

$$\frac{1}{t}\int_0^t Mf'^2(\xi(s))\left[\sigma(s,g(\xi(s)),\xi(s))-\sigma(\xi(s))\right]^2 ds\leqslant\frac{N_1^2}{t}\int_0^t \varphi_2^2(s)\,ds. \tag{15}$$

Принимая во внимание (13)—(15) и условие теоремы $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{\sqrt{t}}\int_0^t\varphi_i(s)\,ds=0$, можно утверждать, что

$$J_1\to 0,\ t\to\infty;\quad J_3\to 0,\ t\to\infty;\quad J_2\to C,\ t\to\infty,$$

где C — постоянная, которую, не нарушая общности рассуждений, можно считать нулем. В дальнейшем удобно полагать $t\in[0,T]$, $T\to\infty$. Тогда при $T\to\infty$

$$\frac{f(\xi(tT))}{\sqrt{T}}=\frac{f(\xi(0))}{\sqrt{T}}+\int_0^t f'(\xi(sT))\sigma(\xi(sT))\frac{dw(sT)}{\sqrt{T}},$$

откуда, вводя обозначения

$$f'(y)\sigma(y)=\exp\left\{-2\int_0^y\frac{a(v)}{\sigma^2(v)}\,dv\right\}\sigma(y)=b(y)$$

(легко заметить, что $b(y)$ — ограниченная функция),

$$\frac{dw(sT)}{\sqrt{T}}=w_1(s),\qquad\frac{f(\xi(tT))}{\sqrt{T}}=\zeta_T(t),$$

получаем

$$\zeta_T(t) = \frac{f(\xi(0))}{\sqrt{T}} + \int_0^t b(\xi(sT))\,dw_1(s). \tag{16}$$

Можно показать, что на некотором другом вероятностном пространстве (Q', F', P') может быть построен процесс $\eta_T(t)$, конечномерные распределения которого совпадают с конечномерными распределениями процесса $\zeta_T(t)$; процесс $\eta_T(t)$ таков, что $\eta_T(t) \to \eta(t)$ по вероятности при $T \to \infty$.

Это делается на основании [5] (см. гл. 1, § 6), так как $b(y)$ — ограниченная функция. Следовательно,

$$\lim_{h\to 0} \overline{\lim_{T\to 0}} \sup_{|s_1-s_2|\leqslant h} P\{|\zeta_T(s_1) - \zeta_T(s_2)| > \varepsilon\} = 0$$

при любом $\varepsilon > 0$ и

$$\lim_{C\to\infty} \lim_{T\to\infty} \sup_{0\leqslant t\leqslant T} P\{|\zeta_T(t)| > c\} = 0.$$

В силу (16) и совпадения распределений процессов $\zeta_T(t)$ и $\eta(t)$

$$\eta_T(t) = \eta_T(0) + \int_0^t b(\varphi(\eta_T(s)\cdot\sqrt{T})\,dw(s), \tag{16'}$$

где $\varphi(\circ)$ — функция, обратная к $f(x)$.

Пусть

$$\tilde{\sigma}(x) = \begin{cases} b(\infty), & x > 0; \\ 1, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда $b(\xi(sT)) - \tilde{\sigma}(\xi(sT)) \to 0$ по вероятности при $T \to \infty$.

Чтобы доказать это, надо установить следующий факт:

$$P\{|\xi(sT)| < c\} \to 0, \quad T \to \infty, \quad 0 \leqslant s \leqslant t, \text{ для любого } c > 0. \tag{17}$$

Докажем это, рассмотрев следующее разложение:

$$\Phi(\xi(tT)) = \Phi(\xi(0)) + T\int_0^t \Phi'(\xi(sT))\Big[a(sT, g(\xi(sT)), \xi(sT)) +$$
$$+ \frac{1}{2}\Phi''(\xi(sT))\sigma^2(sT, g(\xi(sT)), \xi(sT))\Big]ds +$$
$$+ \int_0^t \Phi'(\xi(sT))\sigma(sT, g(\xi(sT)), \xi(sT))\,dw(sT) =$$
$$= \Phi(\xi(0)) + T\int_0^t \Big[\Phi'(\xi(sT))a(\xi(sT)) + \frac{1}{2}\Phi''(\xi(sT))\sigma^2(\xi(sT))\Big]ds +$$
$$+ T\int_0^t \Phi'(\xi(sT))[a(sT, g(\xi(sT)), \xi(sT)) - a(\xi(sT))]ds +$$
$$+ \frac{1}{2}T\int_0^t \Phi''(\xi(sT))[\sigma^2(sT, g(\xi(sT)), \xi(sT)) - \sigma^2(\xi(sT))]ds +$$

$$+\int_0^t \Phi'(\xi(sT))[\sigma(sT, g(\xi(sT)), \xi(sT))-\sigma(\xi(sT))]dw(sT)+$$

$$+\int_0^t \Phi'(\xi(sT))\sigma(\xi(sT))dw(sT).$$

Удобно выбрать

$$\Phi'(x)a(x)+\frac{1}{2}\Phi''(x)\sigma^2(x)=\chi_{|x|<c},$$

где

$$\chi_{|x|<c}=\begin{cases}1, & |x|<c;\\ 0, & |x|\geqslant c.\end{cases}$$

Введя обозначения $\Phi(x)=y$; $\Phi'(x)=\frac{dy}{dx}$; $\Phi''(x)=\frac{d^2y}{dx^2}$, получим

$$\frac{dy}{dx}a(x)+\frac{1}{2}\frac{d^2y}{dx^2}\sigma^2(x)=\chi_{|x|<c};$$

пслагая $\frac{dy}{dx}=z$, перепишем уравнение в виде

$$\frac{1}{2}\frac{dz}{dx}\sigma^2(x)+za(x)=\chi_{|x|<c},$$

или

$$\frac{dz}{dx}+\frac{2a(x)}{\sigma^2(x)}z=\frac{\chi_{|x|<c}}{\sigma^2(x)}.$$

Решая это уравнение методом вариации произвольной постоянной, получаем окончательный вид решения

$$\Phi(x)=\int_0^x e^{-2\int_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv}\int_0^u \frac{e^{2\int_0^z \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv}}{\sigma^2(z)}\chi_{(-c,\,c)}(z)\,dz\,du.$$

В силу условия 2 теоремы

$$\left|\int_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv\right|\leqslant C, \qquad \left|e^{-2\int_0^u \frac{a(v)}{\sigma^2(v)}dv}\right|\leqslant C_1,$$

и приближенно можно считать $\Phi(x)\sim c|x|$. Тогда

$$\frac{\Phi(x)}{x^2}\to 0, \quad |x|\to\infty. \tag{18}$$

Далее,

$$\frac{1}{T} M \left| T \int_0^t \Phi'(\xi(sT)) [a(sT, g(\xi(sT)), \xi(sT)) - a(\xi(sT))] ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{T} \int_0^t \varphi_1(sT) M |\Phi'(\xi(sT))| ds;$$

$$M |\Phi'(\xi(s))| \leqslant C_2;$$

значит

$$\frac{1}{T} \int_0^{tT} \varphi_1(s) M |\Phi'(\xi(s))| ds \leqslant \frac{C_2 t}{tT} \int_0^{tT} \varphi_1(s) ds = \frac{C_2 t}{\sqrt{tT}} \cdot \frac{1}{\sqrt{tT}} \int_0^{tT} \varphi_1(s) ds \to 0, \quad T \to \infty.$$

Аналогично

$$\frac{1}{T} M \left| T \int_0^t \Phi''(\xi(sT)) [\sigma^2(sT, g(\xi(sT)), \xi(sT)) - \sigma^2(\xi(sT))] ds \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_3 t}{\sqrt{tT}} \cdot \frac{1}{\sqrt{tT}} \int_0^{tT} \varphi_2(s) ds \to 0, \quad T \to \infty.$$

$$\frac{1}{T} M \left[\int_0^t \Phi'(\xi(sT)) (\sigma(sT, g(\xi(sT)), \xi(sT)) - \sigma(\xi(sT))) dw(sT) \right]^2 =$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^t M\Phi'^2(\xi(sT)) [\sigma(sT, g(\xi(sT)), \xi(sT)) - \sigma(\xi(sT))]^2 ds;$$

оценку последнего выражения дает формула (15), следовательно, и оно стремится к нулю при $T \to \infty$.

Итак, имеем

$$M\left(\int_0^t \chi_{|x|<c}(\xi(sT)) ds \right) = M\left(\frac{\Phi(\xi(tT))}{T} \right) +$$

$$+ \frac{1}{T} M \int_0^t \Phi'(\xi(sT)) \sigma(\xi(sT)) dw(sT) + o(1).$$

Ввиду ограниченности $\sigma(x)$ и учитывая (18), второй член справа стремится к нулю при $T \to \infty$. Тогда и

$$\int_0^t P\{|\xi(sT)| < c\} ds = o(1) + \frac{M\Phi(\xi(tT))}{T} \to 0, \quad T \to \infty,$$

так как

$$\frac{M\Phi(\xi(tT))}{T} \leqslant \frac{cM|\xi(tT)|}{T} \sim \frac{1}{\sqrt{T}} M \left| \frac{\xi(tT)}{\sqrt{T}} \right| \to 0, \quad T \to \infty.$$

Отсюда следует (17). Следовательно, можно утверждать, что $b(\xi(sT)) - \tilde{\sigma}(\xi(sT)) \to 0$ по вероятности при $T \to \infty$ и $b(\varphi(\eta_T(s) \cdot \sqrt{T})) - \tilde{\sigma}(\varphi(\eta_T(s) \cdot \sqrt{T})) \to 0$ по вероятности при $T \to \infty$.

Рассмотрим теперь

$$M[\int_0^t b(\xi(sT))\,dw(s) - \int_0^t \tilde{\sigma}(\xi(sT))\,dw(s)]^2 = \int_0^t M[b(\xi(sT)) - \tilde{\sigma}(\xi(sT))]^2 ds = \int_0^t M\chi_{|\xi(sT)|<c}[b(\xi(sT)) - \tilde{\sigma}(\xi(sT))]^2 ds + \int_0^t M\chi_{|\xi(sT)|>c}[b(\xi(sT)) - \tilde{\sigma}(\xi(sT))]^2 ds.$$

Так как $[b(\xi(sT)) - \tilde{\sigma}(\xi(sT))]^2 \leqslant L$, где L — некоторая постоянная, то

$$M[\int_0^t b(\xi(sT))\,dw(s) - \int_0^t \tilde{\sigma}(\xi(sT))\,dw(s)]^2 \leqslant L\int_0^t P\{|\xi(sT)| < c\}ds + \varepsilon\int_0^t P\{|\xi(sT)| > c\}ds \leqslant o(1) + \varepsilon.$$

Отсюда

$$\overline{\lim_{T\to\infty}}\, M[\int_0^t b(\xi(sT))\,dw(s) - \int_0^t \tilde{\sigma}(\xi(sT))\,dw(s)]^2 \leqslant \varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$; тогда и

$$\lim_{T\to\infty} M[\int_0^t b(\xi(sT))\,dw(s) - \int_0^t \tilde{\sigma}(\xi(sT))\,dw(s)]^2 = 0.$$

Но это значит, что

$$\int_0^t b(\xi(sT))\,dw(s) - \int_0^t \tilde{\sigma}(\xi(sT))\,dw(s) \to 0 \quad \text{по вероятности при } T \to \infty \ (*).$$

Отсюда, в свою очередь, следует

$$\int_0^t b(\varphi(\eta_T(s) \cdot \sqrt{T}))\,dw(s) - \int_0^t \tilde{\sigma}(\varphi(\eta_T(s) \cdot \sqrt{T}))\,dw(s) \to 0$$

по вероятности при $T \to \infty$.

Теперь

$$\int_0^t \tilde{\sigma}(\varphi(\eta_T(s) \cdot \sqrt{T}))\,dw(s) = \int_0^t \tilde{\sigma}(\eta_T(s))\,dw(s).$$

Так как $\eta_T(s) \to \eta(s)$ по вероятности при $T \to \infty$, то можно показать, что $\tilde{\sigma}(\eta_T(s)) \to \tilde{\sigma}(\eta(s))$ по вероятности при $T \to \infty$, если имеет место

$$P\{|\eta(s)| = 0\} = 0. \tag{19}$$

Для доказательства (19) достаточно показать, что

$$\int_0^t P\left\{\left|\frac{f(\xi(sT))}{\sqrt{T}}\right| < \varepsilon\right\} ds \to 0, \quad T \to \infty.$$

Но этот результат может быть получен тем же методом, что и (17). Поэтому, считая (19) доказанным, можно утверждать

$$M[\int_0^t \tilde{\sigma}(\eta_T(s))\,dw(s) - \int_0^t \tilde{\sigma}(\eta(s))\,dw(s)]^2 = \\ = \int_0^t M[\tilde{\sigma}(\eta_T(s)) - \tilde{\sigma}(\eta(s))]^2\,ds \to 0,\ T\to\infty. \tag{20}$$

Учитывая (16), (*), (20), получаем

$$\eta(t) = \int_0^t \tilde{\sigma}(\eta(s))\,dw(s). \tag{21}$$

Рассмотрим теперь параболическое дифференциальное уравнение

$$-\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(x)\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} \tag{22}$$

с начальным условием

$$u(s,x) = g(x),\quad t<s,\quad -\infty<x<\infty.$$

Если ввести вспомогательную функцию $v(t,x) = u(s-t,x)$, то $v(0,x) = g(x)$ при $t>0$ и (22) перепишется в виде

$$\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} = \frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(x)\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial x^2}. \tag{23}$$

Решая уравнение (23) с помощью преобразования Лапласа по t, получаем [7] ($a = b(\infty)$) при $x \geqslant 0$

$$v(t,x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty g(u)e^{-(u-x)^2/2a^2t}\,du - \frac{a-1}{a(a+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\times \\ \times\int_0^\infty g(u)e^{-(u+x)^2/2a^2t}\,du + \frac{2a}{a+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^0 g(u)e^{-(au-x)^2/2a^2t}\,du$$

и при $x \leqslant 0$

$$v(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^0 e^{-(u-x)^2/2t}g(u)\,du + \frac{a-1}{a+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\times \\ \times\int_{-\infty}^0 g(u)e^{-(u+x)^2/2t}\,du + \frac{2}{a(a+1)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty g(u)e^{-(u-ax)^2/2a^2t}\,du.$$

Пусть $\zeta(t) = u(t,\eta_1(t))$, где $u(t,x)$ — решение уравнения (22), а $\eta_1(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\eta_1(t) = x + \int_0^t \tilde{\sigma}(\eta_1(s))\,dw(s)$$

и условию $P\{|\eta_1(t)|=0\}=0$ при любом t. Для процесса $u(t,\eta_1(t))$ нетрудно показать справедливость формулы Ито. Тогда

$$\zeta(t)=u(0,x)+\int_0^t\left[u'_s(s,\eta_1(s))+\frac{1}{2}\tilde{\sigma}^2(\eta_1(s))u''_{xx}(s,\eta_1(s))\right]ds+$$
$$+\int_0^t u'_x(s,\eta_1(s))\tilde{\sigma}(\eta_1(s))\,dw(s).$$

Отсюда

$$M_x u(t,\eta_1(t))=u(0,x).$$

Так как $u(t,x)$ и $\eta_1(t)$ непрерывны, то при $t\to s$ получаем $M_x g(\eta_1(s))=$ $=v(s,x)$, где $v(s,x)$ — решение уравнения (23).

Следовательно, условное распределение процесса $\eta_1(t)$ совпадает с распределением, имеющим следующую плотность:

$$\varrho(t,u,x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a\sqrt{2\pi t}}e^{-(u-x)^2/2a^2t}-\dfrac{a-1}{a+1}\cdot\dfrac{1}{a\sqrt{2\pi t}}e^{-(u+x)^2/2a^2t}, & u>0,\ x\geqslant 0;\\[2mm] \dfrac{2a}{a+1}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(au-x)^2/2a^2t}, & u<0,\ x\geqslant 0;\\[2mm] \dfrac{2}{a(a+1)}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(u-ax)^2/2a^2t}, & u>0,\ x\leqslant 0;\\[2mm] \dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(u-x)^2/2t}+\dfrac{a-1}{a+1}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-(u+x)^2/2t}, & u<0,\ x\leqslant 0.\end{cases}$$

Полагая здесь $x=0$, получим плотность распределения процесса $\zeta_T(t)$

$$\varrho(t,u)=\begin{cases}\dfrac{2}{a+1}\cdot\dfrac{1}{a\sqrt{2\pi t}}e^{-u^2/2a^2t}, & u>0;\\[2mm] \dfrac{2a}{a+1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-u^2/2t}, & u<0;\end{cases}$$

$$a=b(\infty).$$

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ito K., Nisio M., On stationary solutions of a stochastic differential equation, J. Math. Kyoto Univ., 4, No. 1, 1 (1964).
2. Mc Stane E. J., Stochastic integrals and stochastic functionai equations, J. Appl. Math., 17, No. 2, 287 (1969).
3. Кулинич Г. Л., Предельное поведение распределений решения стохастического диффузионного уравнения, Укр. матем. ж., 19, № 2 (1967).
4. Кулинич Г. Л., Предельные распределения решения стохастического диффузионного уравнения, Теория вероятн. и ее прим., № 3 (1968).
5. Скороход А. В., Исследования по теории случайных процессов, Киев, 1961.

6. Гихман И. И., Скороход А. В., Стохастические дифференциальные уравнения, Киев, 1968.
7. Дынкин Е. Б., Марковские процессы, М., 1963.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
24/II 1972

JELENA ROOS

PROTSESSI SENISEST KÄIGUST SÕLTUVATE KOEFITSIENTIDEGA STOHHASTILISE DIFERENTSIAALVÕRRANDI LAHENDI PIIRJAOTUS

Artiklis vaadeldakse stohhastilist diferentsiaalvõrrandit kujul

$$d\xi(t)=a(t,g(\xi(t)),\ \xi(t))dt+\sigma(t,g(\xi(t)),\ \xi(t))dw(t)$$

kus koefitsiendid $a(t,\ x,\ y)$ ja $\sigma(t,\ x,\ y)$ sõltuvad protsessi senisest käigust.
On tuletatud selle võrrandi lahendi piirjaotus ilmutatud kujul.

YELENA ROOS

ON THE LIMIT DISTRIBUTIONS BEHAVIOUR OF THE SOLUTION OF THE STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION WITH COEFFICIENTS DEPENDING ON THE PAST PERFORMANCE OF THE PROCESS

In this article the limit distribution's behaviour of the solution of the stochastic differential equation

$$d\xi(t)=a(t,g(\xi(t)),\ \xi(t))dt+\sigma(t,g(\xi(t)),\ \xi(t))dw(t)$$

is considered.
The distinct form of this limit distribution is the most important result of the paper.