EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.4.20

УДК 519.83:519.251.8

Р. ТАВАСТ

ОЦЕНКА ДОПУСТИМОГО МНОЖЕСТВА В ЗАДАЧАХ ПРОГРАММИРОВАНИЯ С ВЕРОЯТНОСТНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

R. TAVAST. TOENÄOSUSLIKE TÖKETEGA PLANEERIMISÜLESANNETE LUBATAVA HULGA HINNANG

R. TAVAST. ESTIMATE OF THE ADMISSIBLE SET IN CHANCE-CONSTRAINED PROGRAMMING PROBLEMS

Во многих задачах программирования с вероятностными ограничениями [1, 2] допустимое r-мерное множество значений вектора независимых переменных x определяется как пересечение множеств следующего вида:

$$U_p = \{x : P[x'a \leqslant b] \geqslant p,\ x \geqslant 0\}, \qquad 0{,}5 < p \leqslant 1. \tag{1}$$

Здесь P означает «вероятность», x' — транспонированный вектор x. Пусть случайный вектор $(b, a')' = (b, a_1, \ldots, a_r)'$ имеет нормальную функцию распределения (ф. р.) $N_{r+1}(\mu, \Sigma)$ и K_p есть p-квантиль стандартного нормального распределения, т. е.

$$1/\sqrt{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{K_p} e^{-t^2/2}\, dt = p.$$

Обозначим $y' = (-1, x')$, $\mu_x = y'\mu$, $\sigma_x^2 = y'\Sigma y$. Тогда множество

$$U_p^e = \{x : \mu_x + K_p\sigma_x \leqslant 0,\ x \geqslant 0\} \tag{2}$$

совпадает с U_p [2]. Параметры μ, Σ, K_p предполагаются такими, что найдутся точки $x \in U_p$, помимо $x = 0$, и U_p будет ограничено.

В практических задачах параметры μ и Σ обычно неизвестны и имеются лишь наблюдения над случайным вектором $(b, a')'$. Рассмотрим проблему построения на основе выборочных статистик множества $U_{\gamma pf}$, близкого в вероятностном смысле к U_p.

Пусть имеется выборка объемом n из совокупности $N_{r+1}(\mu, \Sigma)$ и пусть вычислены вектор выборочных средних m и выборочная ковариантная матрица S, являющиеся несмещенными и состоятельными оценками μ и Σ соответственно. Тогда функция $m_x = y'm$ имеет ф. р. $N(\mu_x, \sigma_x^2/n)$, а функция $s_x^2 = y'Sy$ распределена как $\sigma_x^2\chi^2$ с числом степеней свободы $f = n - 1$ [3].

Предлагается определить оценку множества U_p на уровне значимости γ как случайное множество

$$U_{\gamma pf} = \{x : m_x + ks_x \leqslant 0,\ x \geqslant 0\}. \tag{3}$$

Здесь квантиль $\mu_x + K_p\sigma_x$ заменен толерантным пределом $m_x + ks_x$, причем k не зависит от x и удовлетворяет условию

$$P[\mu_x + K_p\sigma_x \leqslant m_x + ks_x] = \gamma. \tag{4}$$

Тогда точки $x^* \geqslant 0$, удовлетворяющие неравенству $m_{x^*} + ks_{x^*} \leqslant 0$, удовлетворяют неравенству $\mu_{x^*} + K_p\sigma_{x^*} \leqslant 0$ с вероятностью γ, следовательно, с вероятностью γ $U_{\gamma pf} \subset U_p$.

Для вычисления k может быть применена стандартная процедура оценки одностороннего толерантного предела нормальной совокупности [4]. Статистика

$$T_f(\delta) = [\sqrt{n}(m_x - \mu_x)/\sigma_x - \delta]/(s_x/\sigma_x) \tag{5}$$

имеет нецентральное t-распределение с параметром нецентральности δ и числом степеней свободы f. Из (4) и (5) сразу следует, что

$$P[T_f(\sqrt{n}\,K_p) \leqslant \sqrt{n}\,k] = \gamma, \tag{6}$$

отсюда

$$k = k(\gamma, p, f) = t_\gamma/\sqrt{n}, \tag{7}$$

где t_γ есть γ-квантиль нецентрального t-распределения с параметром нецентральности $\delta = \sqrt{n}K_p$.

Вычисление k может быть существенно упрощено применением аппроксимаций нецентрального t-распределения. Нормальная аппроксимация Джонсона—Уэлча [5]

$$\delta(\gamma, f) = t_\gamma + K_\gamma\sqrt{1 + t_\gamma^2/2f} \tag{8}$$

ведет при $\delta = \sqrt{n}K_p$, $k = t_\gamma/\sqrt{n}$ к формуле

$$k_a = (1/(1 - K_\gamma^2/2f)\,[K_p + \sqrt{K_p^2 - (1 - K_\gamma^2/2f)\,(K_p^2 - K_\gamma^2/n)}\,], \tag{9}$$

$$K_\gamma^2 \leqslant 2f + nK_p^2.$$

Ошибка $k_a - k$ аппроксимации (9) по сравнению с точным значением $k(\gamma, p, f)$ положительна и меньше 0,05 при $\gamma \geqslant 0{,}9$, $p \leqslant 0{,}999$, $n \geqslant 20$, $f = n - 1$ [4].

Из (9) следует, что $k_a > K_p$ при $K_\gamma^2 \leqslant 2f + nK_p^2$ и $\lim\limits_{n\to\infty} k_a = K_p$; кроме того, k есть монотонно возрастающая функция γ.

Установим простой факт относительно сходимости случайных множеств. В ([3] с. 223) определяется расстояние dist (A, B) между множествами $A \neq 0$ и $B \neq 0$ как наибольшее из чисел

$$\sup_{x\in A} \varrho(x, B) \quad \text{и} \quad \sup_{y\in B} \varrho(y, A),$$

где $\varrho(x, B) = \inf\limits_{y\in B} \|x - y\|$. Обозначим $d_{\gamma,n} = \text{dist}\,(U_{\gamma pf}, U_p)$. Тогда последовательность случайных величин $\{d_{\gamma,n}\}$, $n = 1, 2, \ldots$ сходится по вероятности к нулю.

Действительно, обозначив $d_n = \text{dist}\,(U_{\gamma pf}(\mu_n, \Sigma_n), U_p(\mu, \Sigma))$ имеем $\lim d_n \to 0$ при $\mu_n \to \mu$, $\Sigma_n \to \Sigma$. Заменим μ_n и Σ_n состоятельными оценками m и S соответственно. Так как $m \to \mu$, $S \to \Sigma$ по вероятности, то $d_{\gamma,n} \to 0$ по вероятности.

Заключение. При неполной информации о распределении случайного вектора, входящего в определение допустимого множества U_p задачи программирования, предлагается вместо U_p использовать множество

$$U_{\gamma pf} = \{x : m_x + k_a\sigma_x \leqslant 0,\ x \geqslant 0,$$
$$k_a = (1/(1-K_\gamma^2/2f))\,[K_p + \sqrt{K_p^2 - (1-K_\gamma^2/2f)\,(K_p^2 - K_\gamma^2/n)}\,]\},$$

совпадающее с U_p с вероятностью γ.

Автор благодарит Т. Тобиаса за ряд ценных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. Charnes A., Cooper W. W., Op. Res., 11, 18 (1963).
2. Symonds C. H., Op. Res., 15, 495 (1967).
3. Рао С. Р., Линейные статистические методы и их применение, М., 1968.
4. Owen D. B., Technometrics, 10, 445 (1968).
5. Easterling R. G., J. Am. Stat. Ass., 64, 1031 (1969).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
7/V 1971

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 4

УДК 519.281

Я. КУКС, В. ОЛЬМАН

МИНИМАКСНАЯ ЛИНЕЙНАЯ ОЦЕНКА КОЭФФИЦИЕНТОВ РЕГРЕССИИ. II

J. KUKS, V. OLMAN. REGRESSIOONIKOEFITSIENTIDE LINEAARNE MINIMAKSHINNANG. II

J. KUKS, V. OLMAN. A MINIMAX LINEAR ESTIMATOR OF REGRESSION COEFFICIENTS. II

В статистических исследованиях весьма часто встречается задача оценивания неизвестного m-мерного вектор-параметра θ в модели

$$E\{\mathbf{Y}\,|\,\theta\} = \mathbf{X}\theta, \quad E\{(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\theta)(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\theta)^{\mathrm{T}}\,|\,\theta\} = \sigma^2\mathbf{I}_n, \tag{1}$$

где $E\{\mathbf{U}|\theta\}$ — математическое ожидание случайной матрицы $\mathbf{U}$ при фиксированном значении параметра θ; $\mathbf{Y}$ — случайный n-мерный вектор наблюдений; $\mathbf{X}$ — известная матрица порядка $n\times m$; $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица порядка $n\times n$; σ^2 — известный положительный коэффициент. Ограничимся рассмотрением линейных по наблюдениям оценок $\hat\theta = \mathbf{TY}$ параметра θ, где $\mathbf{T}$ — матрица порядка $m\times n$. За критерий качества оценки примем супремум функции риска $E\{(\hat\theta-\theta)^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(\hat\theta-\theta)\,|\,\theta\}$ по параметру θ, принадлежащему некоторому априорно заданному эллипсоиду с центром в нуле, т. е. функцию