EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.4.18

УДК 519.3:330.115

ИНГРИД МАУЭР

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ШТРАФНОЙ КОНСТАНТЫ В ДЕКОМПОЗИЦИИ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

INGRID MAUER. TRAHVIKONSTANDI KASUTAMISEST MATEMAATILISE PROGRAMMEERIMISE ÜLESANNETE DEKOMPONEERIMISEL

INGRID MAUER. ON USING THE PENALTY CONSTANT AT DECOMPOSING MATHEMATICAL PROGRAMMING PROBLEMS

Для решения задачи математического программирования излагается штрафной метод, который при решении задачи порождает итеративный процесс на h уровнях, причем на $h-1$ уровнях вычисления можно производить одновременно. Последнее обстоятельство дает основание называть этот процесс также двухуровневым.

На основании метода решение задачи можно свести к решению последовательности задач минимизации некоторых функций при некоторых, согласно выбору (например. при одних или однотиповых), ограничениях. Метод интересно применить при решении задач блочного программирования.

Рассмотрим задачу математического программирования

$$\min\{F(x)\,|\,G_i(x)\leqslant 0\ \ (i=1,\ldots,h)\}. \tag{1}$$

Здесь x — точка евклидового пространства E^n; $F(x)$ — функция; $G_i(x)$ $(i=1,\ldots,h)$ — вектор-функции.

Введем точки-переменные $y_i\in E^n$ $(i=2,\ldots,h)$.

Обозначим

$$G_1=\{x\,|\,G_1(x)\leqslant 0\},\quad G_i=\{y_i\,|\,G_i(y_i)\leqslant 0\}\quad (i=2,\ldots,h),$$
$$G=G_1\times\ldots\times G_h.$$

Наряду с задачей (1) рассмотрим эквивалентную ей задачу

$$\min\{F(x)\,|\,\sum_{i=2}^{h}\|x-y_i\|^2=0,\ (x,y_2,\ldots,y_h)\in G\}^*. \tag{2}$$

Предположим, что множество G_1 — ограниченное; множество G — замкнутое и выпуклое; на множестве G_1 функция $F(x)$ — выпуклая и дифференцируемая.

Изложим штрафной метод для решения задачи (1), используя для этого задачу (2).

Выберем строго возрастающую последовательность положительных чисел (штрафов) $\{M_l\}$, для которой $M_l\underset{l\to\infty}{\longrightarrow}\infty$, и определим задачу

$$\min\{F(x)+M_l\sum_{i=2}^{h}\|x-y_i\|^2\,|\,(x,\ y_2,\ \ldots,\ y_h)\in G\}, \tag{2.l}$$

решение которой обозначим через $(\tilde{x}^{(l)},\ \tilde{y}_2^{(l)},\ \ldots,\ \tilde{y}_h^{(l)})$.

* За исключением отмеченного особо случая все нормы в тексте — нормы пространства E^n.

Излагаемый метод сводит решение задачи (1) к решению последовательности задач (2.l) ($l=1, 2, \ldots$).

Остановимся на методе решения задачи (2.l). Предложим для ее решения метод покомпонентного спуска, итеративный процесс которого в данном случае пусть заключается в следующем.

Фиксируем $y_i^{(0l)} = \tilde{y}_i^{(l-1)}$ ($i=2, \ldots, h$) (при $l=1$ $y_i^{(01)}$ ($i=2, \ldots, h$) выберем произвольно) и определяем $x^{(1l)}$ как решение задачи

$$\min \{F(x) + M_l \sum_{i=2}^{h} \|x - y_i^{(0l)}\|^2 \,|\, x \in G_1\}.$$

Затем фиксируем $x^{(1l)}$ и устанавливаем $y_i^{(1l)}$ ($i=2, \ldots, h$) как решения задач

$$\min \{\|x^{(1l)} - y_i\|^2 \,|\, y_i \in G_i\} \quad (i=2, \ldots, h)$$

соответственно.

Далее фиксируем $y_i^{(1l)}$ ($i=2, \ldots, h$), определяем $x^{(2l)}$ и т. д.

В процессе применения метода образуется последовательность $\{(x^{(kl)}, y_2^{(kl)}, \ldots, y_h^{(kl)})\}$, любая сходящаяся подпоследовательность которой при указанных выше допущениях сходится к одному из решений задачи (2.l). Так как в теоретических рассуждениях здесь множества G_i ($i=2, \ldots, h$) можно заменить некоторыми ограниченными, замкнутыми и выпуклыми множествами G_i^* ($i=2, \ldots, h$) соответственно, то это утверждение доказывается в [1] приведенной теоремой.

Покажем существование множества G_2^*.

Зафиксируем точку $\hat{y}_2 \in G_2$. Тогда для любой точки $\hat{x} \in G_1$ справедливо

$$\min_{y_2 \in G_2} \|\hat{x} - y_2\|^2 \leqslant C = \max_{x \in G_1} \|x - \hat{y}_2\|^2.$$

Используя

$$\{y_2 \,|\, G_1(y_2) \leqslant 0\} \subseteq \{y_2 \,|\, \|y_2 - \hat{y}_2\| \leqslant \sqrt{C}\},$$

сконструируем множество G_2^* следующим образом:

$$G_2^* = \{y_2 \,|\, \|y_2 - \hat{y}_2\|^2 \leqslant 4C, \ y_2 \in G_2\}.$$

Это множество является ограниченным, замкнутым и выпуклым.

Аналогично показывается существование множеств G_i^* ($i=3, \ldots, h$).

Если повторить проведенный в [2] анализ, принимая обозначение $\Delta^{(l)}$ в виде

$$\Delta^{(l)} = \sum_{i=2}^{h} \|\tilde{x}^{(l)} - \tilde{y}_i^{(l)}\|^2 \qquad (3)$$

и заменяя везде $\|u - v\|^2_{E^{mN}}$ выражением $\sum_{i=2}^{h} \|x - y_i\|^2$, а (u, v) — точкой $(y_2, \ldots, y_h)$, то можно выписать

$$\varrho(\tilde{x}^{(l)}, M^{(1)}) \xrightarrow[l \to \infty]{} 0. \qquad (4)$$

Здесь $M^{(1)}$ обозначает множество всех решений задачи (1).

Согласно лемме [2] $\Delta^{(l)} \underset{l\to\infty}{\to} 0$. Следовательно, учитывая (3) и (4), также и

$$\varrho(\tilde{y}_i^{(l)}, M^{(1)}) \underset{l\to\infty}{\to} 0 \quad (i = 2, \ldots, h).$$

Примечания. 1. Описанный метод при отыскании решения системы $G_i(x) \leqslant 0$ $(i = 1, \ldots, h)$ предусматривает решение задачи

$$\min \{ \sum_{i=2}^{h} \|x - y_i\|^2 \,|\, (x, y_2, \ldots, y_h) \in G \}.$$

2. Рассматриваемый метод, разумеется, можно изложить и в более общей форме в случае задачи (1) при ограничениях, включающих и равенства.

Автор благодарит С. Ульма за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Авт. и телемех., 24, № 12 (1963).
2. Мауэр И., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 20, 401 (1971).

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
24/IV 1971

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 4

УДК 536.46:533.6

Х. ЛУБИ

О РАСЧЕТЕ ДЛИНЫ ДИФФУЗИОННО-КИНЕТИЧЕСКИХ ФАКЕЛОВ ПРИРОДНОГО ГАЗА

H. LUBI. LOODUSLIKU GAASI DIFUUSSE-KINEETILISE LEEGI PIKKUSE ARVUTAMISEST

H. LUBI. ON THE CALCULATION OF DIFFUSION-KINETIC FLAMES OF NATURAL GAS

В статье [1] излагалась одна из возможных методик расчета длины диффузионно-кинетического факела сланцевого газа. Основываясь на модели диффузионного горения, была выведена формула безразмерной длины факела

$$\frac{L}{d} = \sqrt[5]{\frac{\mathrm{Fr}}{f^*(G)\,f^*(\gamma)} \frac{\gamma_{\text{г}}^*}{\gamma_{\text{см}}} \left[N_0(1 + G^*) - \frac{1}{b_0} \right]^2}.$$