EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.4.05

УДК 531.38

И. КЕЙС

ОБ УРАВНЕНИЯХ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА

Задача составления и исследования уравнений движения твердого тела и гиростата рассматривалась в работах [1-4]. Ввиду применения в них избыточных переменных, определенный интерес представляет возможность получения канонической формы уравнений, не содержащих тригонометрических выражений в функции Гамильтона. Этот вопрос рассматривается в работе для поступательно-вращательного движения гиростата и для гиростата, закрепленного в центре масс.

1. Постановка задачи и обозначения

Принято, что на гиростат S_1 действует гиростатическая система S_2, на движение которой гиростат S_1 не оказывает влияния. Центр масс S_2 покоится в точке o_2 неподвижного пространства, а вектор угловой скорости S_2 — достаточно гладкая известная вектор-функция $\omega(t)$ относительно неподвижного триэдра $o_2\xi\eta\zeta$. Все используемые триэдры ортогональны. Если o_1 обозначает центр масс S_1, то соответствующий радиус-вектор $r_0 = o_2o_1$. Оси первого подвижного триэдра $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$ совпадают с главными центральными осями эллипсоида инерции S_1, оси второго триэдра $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$ совмещены с аналогичными осями гиростата S_2. Для простоты принято, что проекции k_1, k_2, k_3 момента количества относительного движения в S_1 постоянны. Прописные буквы A, B, C, G обозначают соответственно матрицы $\|a_{ij}\|$, $\|b_{ij}\|$, $\|c_{ij}\|$, $\|g_{ij}\|$. A' — транспонированная A матрица; $|A|$ — определитель матрицы A; $|u|$ — модуль вектора u, задаваемого столбцом $(u_1, u_2, u_3 \ldots . u_m)'$, элементы которого есть проекции на соответствующие оси триэдра; $[u, v]$ и $<u, v>$ — векторное и скалярное произведения векторов. Одинаковый индекс у сомножителей означает суммирование. Проекции вектора $\omega_2(t)$ в триэдре $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$ суть известные функции времени $y_{12}(t)$, $y_{22}(t)$, $y_{32}(t)$.

Индексом 1 снабжены величины, соответствующие гиростату S_1, индексом 2 — соответствующие системе S_2. Например, в триэдре $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$ радиус-вектор s-й материальной точки S_1 с массой m_{s1} записывается как r_{s1}, а радиус-вектор n-й материальной точки S_2 с массой m_{n2} — как r_{n2}, где $s1 = \overline{1, N_1}$, $n2 = \overline{1, N_2}$. Предполагается, что существует единая силовая функция, соответствующая взаимодействию точек s и n,

$$U_{sn} = m_{s1}m_{n2}\varphi(r_{s1}, r_{n2}), \tag{1.1}$$

где φ — известная достаточно гладкая функция указанных радиус-векторов. Считается, что движение гиростата S_1 рассматривается на отрезке времени t, в течение которого множества радиус-векторов материальных точек тел S_1 и S_2 ограничены и сами тела не пересекаются.

Используя указанные предположения, составим уравнения движения гиростата S_1 относительно триэдра $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$ для случаев, когда 1) o_1 движется относительно этого триэдра, 2) o_1 покоится в нем.

2. Решение задачи

Пусть угловое положение триэдра $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$ относительно триэдра $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$ определяется [2] матрицей перехода A

$$\begin{array}{cccc} & x_{12} & x_{22} & x_{32} \\ x_{11} & \lambda_0^2+\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_3+\lambda_1\lambda_2) & 2(\lambda_1\lambda_3-\lambda_0\lambda_2) \\ x_{21} & 2(\lambda_1\lambda_2-\lambda_0\lambda_3) & \lambda_0^2+\lambda_2^2-\lambda_1^2-\lambda_3^2 & 2(\lambda_0\lambda_1-\lambda_2\lambda_3) \\ x_{31} & 2(\lambda_0\lambda_2+\lambda_1\lambda_3) & 2(\lambda_2\lambda_3-\lambda_0\lambda_1) & \lambda_0^2+\lambda_3^2-\lambda_1^2-\lambda_2^2, \end{array} \tag{2.1}$$

элементы которой выражены через параметры Родрига—Гамильтона, связанные равенством

$$\sum_{i=0}^{3}\lambda_i^2=1. \tag{2.2}$$

Пусть ω_1 — вектор абсолютной угловой скорости S_1. Триэдр $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$ вращается относительно триэдра $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$ с угловой скоростью $\omega=\omega_1-\omega_2$, проекции которой на оси триэдра $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$ ввиду [2] определяются равенствами

$$y_1=2(\lambda_0\dot\lambda_1-\lambda_1\dot\lambda_0+\lambda_3\dot\lambda_2-\lambda_2\dot\lambda_3); \quad y_2=2(\lambda_0\dot\lambda_2-\lambda_2\dot\lambda_0+\lambda_1\dot\lambda_3-\lambda_3\dot\lambda_1); \tag{2.3}$$
$$y_3=2(\lambda_0\dot\lambda_3-\lambda_3\dot\lambda_0+\lambda_2\dot\lambda_1-\lambda_1\dot\lambda_2),$$

где точка означает производную по времени. Для проекций ω_1 на оси триэдра $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$ в силу (2.1) и (2.3) получаются выражения

$$y_{k1}=y_k+a_{kj}y_{j2} \quad (k, j=\overline{1,3}). \tag{2.4}$$

Введем с помощью преобразования Дарбу [5] три новые переменные z_j

$$\lambda_0=(z_0-2)z_0^{-1}; \quad \lambda_j=2z_jz_0^{-1}; \quad z_0=1+|z|^2, \tag{2.5}$$

в которых соотношение (2.2) выполняется тождественно.

При условии $\lambda_0\neq 1$ существует обратное преобразование

$$z_j=\lambda_j(1-\lambda_0)^{-1}; \quad |z|^2=\sum_{j=1}^{3}z_j^2=(1+\lambda_0)(1-\lambda_0)^{-1}. \tag{2.6}$$

Далее предполагается, что триэдр $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$ выбран в теле S_1 с соблюдением указанного условия в начальный момент времени.

Из равенств (2.5) для производных от λ_0 и λ_j следуют выражения

$$\dot\lambda_0=4z_kz_0^{-2}\dot z_k; \quad \dot\lambda_j=2[\dot z_j+z_k(z_k\dot z_j-2z_j\dot z_k)]z_0^{-2}, \tag{2.7}$$

подставив которые в соотношение (2.3), получим значения y_k в виде линейных относительно $\dot z_j$ функций.

Лагранжиан L_{s1} относительного движения материальной точки $s1$ во вращающемся триэдре $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$, учитывающий с помощью потенциала Майера [6,7] значения переносной и кориолисовой сил инерции и обобщенный на случай произвольной достаточно гладкой вектор-функции $\omega_2(t)$, имеет вид

$$2L_{s1} = m_{s1}|\dot{r}_{s1}|^2 + 2m_{s1}\langle\omega_2, [r_{s1}, \dot{r}_{s1}]\rangle + 2m_{(s1)}m_{(n2)}\varphi(r_{(s1)}r_{(n2)}) + \\ + m_{(s1)}(|r_{(s1)}|^2|\omega_2|^2 - \langle r_{(s1)}\omega_2\rangle^2). \tag{2.8}$$

Здесь точка над вектором означает относительную скорость движения материальной точки в триэдре $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$, а круглые скобки при одинаковых индексах указывают на отсутствие суммирования. (Для получения выражения лагранжиана, соответствующего системе S_2, достаточно опустить в правой части равенства эти круглые скобки.)

Используя свойства осей $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$ и $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$ по отношению к геометрии масс гиростатических систем S_1 и S_2, а также обычные кинематические соотношения для поля абсолютных скоростей точек системы S_1, нетрудно составить, исходя из равенства (2.8), выражение лагранжиана L системы S_1, движущейся относительно триэдра $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$,

$$L = T(\omega) + \langle\omega, k\rangle + T_1 + T(\omega_2) + \langle\omega_2, G\omega + k + M[r_0, \dot{r}_0]\rangle + \\ + 0{,}5M\{|\dot{r}_0|^2 + |r_0|^2|\omega_2|^2 - \langle r_0, \omega_2\rangle^2\} + U(r_0, z_1, z_2, z_3). \tag{2.9}$$

Здесь приняты следующие обозначения: M — полная масса гиростата S_1; G — диагональная матрица, ненулевые элементы которой G_1, G_2, G_3 — моменты инерции системы S_1 относительно осей ox_{11}, ox_{21}, ox_{31}. Функции $T(\omega)$, $T(\omega_2)$ и T_1 определяются равенствами

$$T(\omega) = 0{,}5\langle\omega, G\omega\rangle, \tag{2.10}$$

$$T(\omega_2) = 0{,}5\omega_2' A'GA\omega_2 = T_2(z, t),$$

$$T_1 = 0{,}5\langle I^{-1}k, k\rangle + T_0(t), \tag{2.11}$$

где матрица I^{-1} — обратная матрице T тензора инерции системы, совершающей в триэдре $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$ относительное движение в S_1; $T_0(t)$ — некоторая функция параметров относительного движения и времени, которая явным образом не зависит от переменных r_0, $\dot{r}_0$, z, $\dot{z}$.

Нахождение функции $U(r_0, z_1, z_2, z_3)$ определяется следующим соображением. Пусть $l_{s1} = (l_{1s1}, l_{2s1}, l_{3s1})'$ — радиус-вектор точки массой m_{s1} в триэдре $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$. Поскольку $r_{s1} = r_0 + A'l_{s1}$, запишем соответствующий член суммы (2.8) следующим образом:

$$2m_{(s1)}m_{(n2)}\varphi(r_{(n2)}, r_0 + Al_{(s1)}). \tag{2.12}$$

Так как гиростаты S_1 и S_2 имеют неизменное распределение масс в соответствующих триэдрах, суммирование членов (2.12) можно проводить не по частицам, а по элементарным объемам, когда векторы l и r уже не связаны с «отмеченными» частицами, а являются переменными, ограниченными геометрией фигур S_1 и S_2 (переход от лагранжевой к эйлеровой трактовке). Нетрудно показать независимость части силовой функции, соответствующей суммированию по подвижным в теле S_1 частицам, от параметров относительного движения ввиду того, что плотность в S_1 не зависит от этих параметров.

Если существуют достаточно гладкие конечная сумма или предел бесконечной суммы (интеграл), соответствующие функции (2.12), то можно получить функцию U для сил, действующих на S_1. Эта функция согласно выражениям (2.1), (2.5) и (2.12) зависит лишь от r_0, z_1, z_2, z_3 и, что уместно подчеркнуть, не содержит время явно.

Используя равенства (2.6) и значения вариаций $\delta\lambda_i$, соответствующие формулам (3.8.10) работы [2], получим выражения вариаций δz через проекции вектора бесконечно малого поворота $\delta\Theta = (\delta\Theta_1, \delta\Theta_2, \delta\Theta_3)'$ на оси триэдра $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$

$$\begin{aligned}
4\delta z_1 &= (z_2^2 + z_3^2 - z_1^2 - 1)\,\delta\Theta_1 - 2(z_3 + z_1z_2)\,\delta\Theta_2 + 2(z_2 - z_1z_3)\,\delta\Theta_3,\\
4\delta z_2 &= 2(z_3 - z_1z_2)\,\delta\Theta_1 + (z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - 1)\,\delta\Theta_2 - 2(z_1 + z_2z_3)\,\delta\Theta_3,\\
4\delta z_3 &= -2(z_2 + z_1z_3)\,\delta\Theta_1 + 2(z_1 - z_2z_3)\,\delta\Theta_2 + (z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - 1)\,\delta\Theta_3.
\end{aligned}$$

Отсюда следует формула для проекций момента m_0 сил, действующих на S_1 (относительно o_1), на оси триэдра $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$

$$4m_0 = B \operatorname{grad}_z U, \tag{2.13}$$

где матрица

$$B = \begin{Vmatrix} z_2^2 + z_3^2 - z_1^2 - 1 & 2(z_3 - z_1z_2) & -2(z_2 + z_1z_3)\\ -2(z_3 + z_1z_2) & z_1^2 - z_2^2 + z_3^2 - 1 & 2(z_1 - z_2z_3)\\ 2(z_2 - z_1z_3) & -2(z_1 + z_2z_3) & z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - 1 \end{Vmatrix}, \tag{2.14}$$

а определитель $|B|$, как будет показано далее, равен функции $-(1+|z|^2)^3$.

Если центр масс системы S_1 закреплен в триэдре $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$, то для лагранжиана L_0 такой системы из формулы (2.9) в силу $\dot r_0 = 0$ следует выражение

$$L_0 = T(\omega) + \langle\omega, k\rangle + T_1 + T(\omega_2) + \langle\omega_2, G\omega + k\rangle + U(z_1, z_2, z_3) + \\ + 0{,}5M[|r_0|^2|\omega_2|^2 - \langle r_0, \omega_2\rangle^2], \tag{2.15}$$

где U зависит от r_0 как от постоянного параметра.

Пусть проекции вектора $r_0 = (r_1, r_2, r_3)'$ на оси триэдра $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$ обозначаются как z_m $(m = \overline{4,6})$. Используя формулы (2.7) и (2.9), введем импульсы p с помощью записанного ниже преобразования (2.17), якобианом которого является гессиан

$$\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot z_l\, \partial \dot z_n}\right| = \left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot z_j\, \partial \dot z_k}\right| \left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot z_m\, \partial \dot z_s}\right|, \tag{2.16}$$

$$\begin{cases} p_j = \partial L/\partial \dot z_j = (\partial L/\partial y_k)\,(\partial y_k/\partial\dot\lambda_i)\,(\partial\dot\lambda_i/\partial \dot z_j),\\ p_m = \partial L/\partial \dot z_m \qquad (i = \overline{0,3};\ m, s = \overline{4,6};\ j, k = \overline{1,3};\ l, n = \overline{1,6}). \end{cases} \tag{2.17}$$

Здесь для необращения в нуль гессиана (2.16) достаточно, чтобы не исчезал первый сомножитель. В силу линейности по производным от переменных в выражениях (2.3) и (2.7) можно установить, что

$$\left|\frac{\partial^2 L}{\partial \dot z_j\, \partial \dot z_k}\right| = \left|\frac{\partial^2 T}{\partial y_a\, \partial y_b}\right| \left|\frac{\partial y_a}{\partial \dot z_j}\right| \left|\frac{\partial y_b}{\partial \dot z_k}\right| \qquad (a, b = \overline{1,3}).$$

Ввиду строгой выпуклости функции $T(\omega)$ согласно (2.10) якобиан преобразования (2.17) не исчезает, если не обращается в нуль определитель матрицы $C = \|\partial y_l/\partial \dot z_k\|$, имеющей вид

$$C = 4z_0^{-1} \begin{Vmatrix} z_2^2 + z_3^2 - z_1^2 - 1 & 2(z_3 - z_1z_2) & -2(z_2 + z_1z_3)\\ -2(z_3 + z_1z_2) & z_1^2 + z_3^2 - z_2^2 - 1 & 2(z_1 - z_2z_3)\\ 2(z_2 - z_1z_3) & -2(z_1 + z_2z_3) & z_1^2 + z_2^2 - z_3^2 - 1 \end{Vmatrix}. \tag{2.18}$$

Ясно, что матрица B, заданная таблицей (2.14), связана с матрицей C равенством

$$B = 0{,}25 z_0 C \qquad \left(z_0 = 1 + \sum_{j=1}^{3} z_j^2 \right).$$

Определитель W_0 матрицы B как функция величин z_1, z_2, z_3 не меняется при циклической замене аргументов и также удовлетворяет равенству $W_0(z_1, z_2, z_3) = W_0(-z_1, z_2, z_3)$, оказываясь поэтому четной симметрической функцией. Используя разложение по элементарным симметрическим функциям соответствующих степеней, легко установить, что $W_0 = -z_0^3$. Отсюда следует, что $|C| = -64$, и переход к гамильтоновой системе уравнений возможен для новых переменных p, z. Как обычно, в качестве функции Гамильтона $H(p, z)$ используется функция $p_l \dot{z}_l - L$.

Аналогично предыдущему для гиростата, закрепленного в центре масс, можно получить уравнения движения в канонической форме Гамильтона, используя функцию $H_0(p, z) = p_l \dot{z}_l - L_0$, которая, как и функция H, не содержит тригонометрических выражений от z одновременно с функцией $U(z_4, z_5, z_6, z_1, z_2, z_3)$. Следует отметить, что приведение к гамильтоновой форме уравнений в обоих случаях возможно для произвольной достаточно гладкой вектор-функции $\omega_2(t)$.

Ввиду значения функции (2.11) в выражениях L и L_0 при составлении уравнений Лагранжа и Гамильтона можно опустить член T_1. В дальнейшем в качестве значений функций L и L_0 используются соответственно разности $L - T_1$ и $L_0 - T_1$.

С другой стороны, располагая лагранжианами L и L_0 и применяя характеристические функции В. Демина, В. Татевского, К. Райзина [7–9], возможно получить другие формы уравнений движения гиростата, если окажется, что не исчезают соответствующие якобианы преобразования переменных.

Другим путем обобщения предлагаемых в работе уравнений мог бы служить учет сил взаимодействия материальных точек $s1$ и $n2$, зависящих от скоростей векторов r_{s1}, r_{n2} таким образом, чтобы существовал потенциал Майера. Нетривиальность такой попытки обнаружится хотя бы при учете сил взаимодействия подвижной части гиростата S_1 с воздействующей системой S_2.

3. Пример

Нетрудно убедиться на примере ньютоновского притяжения между материальными точками в том, что когда S_1 и S_2 — гиростаты, силовая функция U зависит, вообще говоря, от всех величин z_1, z_2, z_3.

Для этого примера $\varphi = f |r_{s1} - r_{n2}|^{-1}$, где f — постоянная тяготения. Используя член (2.12) для рассматриваемого случая, легко получить выражение силовой функции

$$U = f \int_{D_1} dl_{11}\, dl_{21}\, dl_{31} \int_{D_2} \varrho(l_1)\, \varrho(r)\, |r_0 + A' l_1 - r|^{-1} dr_1\, dr_2\, dr_3, \qquad (3.1)$$

где область D_1 совпадает с телом гиростата S_1; $\varrho_1(l_1)$ — плотность в точке l_1 системы S_1; область D_2 совпадает с телом системы S_2; $\varrho_2(r)$ — плотность в точке r системы S_2; r_i — проекции радиус-вектора r на оси триэдра $o_2 x_{12} x_{22} x_{32}$. Пусть

$$d_0 = \max_t |r|, \quad l_0 = \max_t |l_1|, \quad \varepsilon = \varepsilon(t) = l_0 |r_0|^{-1}, \quad \sigma = \sigma(t) = d_0 |r_0|^{-1} \qquad (3.2)$$

и введены безразмерные величины

$$e_0 = |r_0|^{-1} r_0, \quad b = \overset{-1}{l_0} l_1, \quad a = \overset{-1}{d_0} r \quad (|e| = 1,\ |b| \leqslant 1,\ |a| \leqslant 1), \tag{3.3}$$

в которых формула (3.1) приобретает вид

$$U = f(d_0 l_0)^3 \int\limits_{g_1} db_1\, db_2\, db_3 \int\limits_{g_2} \varrho_1(l_0 b)\, \varrho_2(d_0 a)\, u_0\, da_1\, da_2\, da_3. \tag{3.4}$$

Здесь

$$u_0 = |r_0|^{-1}(1 - 2\sigma a_{kj}\gamma_k a_j + \sigma^2 |a|^2 + 2\varepsilon\gamma_k b_k - 2\varepsilon\sigma a_{kj} b_k a_j + \varepsilon^2 |b|^2)^{-0{,}5};$$
$$(k, j) = (\overline{1,3}) \tag{3.5}$$

γ_k — проекции вектора e_0 на оси триэдра $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$, а области g_1 и g_2 получаются из областей D_1 и D_2 преобразованием подобия с коэффициентами сжатия l_0 и d_0.

Из равенств (3.4) и (3.5) следует, что при $\sigma \neq 0$ функция U зависит, вообще говоря, от всех величин z_1, z_2, z_3. Действительно, для используемых орбит $\varepsilon \approx 10^{-4} \div 10^{-6}$, а $\sigma \approx 1 \div 10^{-1}$ в силу определения этих величин согласно (3.2). Учитывая эти порядки малости, рассмотрим в (3.5) при достаточно общем виде функций $\varrho_1(l_0 b)$, $\varrho_2(d_0 a)$ коэффициент при первой степени величин ε, явно зависящий от элементов матрицы A. Используя разложение по ε, легко обнаружить, что в отличие от случая действия системы S_2 на S_1, эквивалентного действию притягивающего центра в o_2 (когда силовая функция зависит лишь от проекций вектора r_0 на оси триэдра $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$), в общем случае силовая функция U зависит также от угла поворота данного триэдра относительно вектора r_0. Последнее обстоятельство и указывает на то, что силовая функция U существенно зависит от всех переменных z_1, z_2, z_3.

Если, однако, допустима замена системы S_2 на притягивающий центр в o_2, то отпадает необходимость во вращающемся триэдре $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$. В этом случае уместно заменить ω_2 нулевым вектором и использовать соответствующие упрощенные выражения для L и L_0, с помощью которых можно непосредственно составить уравнения движения относительно неподвижного теперь триэдра $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$, сохранив упомянутую схему. Переменные z_k в этом случае задают угловое положение триэдра $o_1x_{11}x_{21}x_{31}$ относительно триэдра Кенига, а совокупность переменных z и p будет связана тремя классическими интегралами площадей относительно осей триэдра $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$ и интегралом Якоби $H(p, z) = \mathrm{const}$.

Если известно, что центр масс S_1 совершает относительно o_2 равномерное круговое движение, то существует [10] (ввиду $|r_0| = \mathrm{const}$, $|\dot{r}_0| = \mathrm{const}$) интеграл Якоби специального вида

$$T(\omega) - U - |\dot{r}_0|\, |r_0|^{-1} \langle G\omega + k, \beta \rangle = \mathrm{const},$$

где $|r_0||\dot{r}_0|\beta = [r_0, \dot{r}_0]$ и, выбрав подходящим образом триэдр $o_2x_{12}x_{22}x_{32}$, получим $\beta = (a_{13}, a_{23}, a_{33})'$.

Наконец, в случае закрепленного центра масс S_1 известны 2 интеграла площадей относительно оси o_2o_1 и интеграл Якоби — $H_0(p, z) = \mathrm{const}$.

Нетрудно составить в новых переменных выражения всех перечисленных интегралов, используя столбцы матрицы A из таблицы (2.1) и формулы перехода (2.3), (2.5) и (2.7).

ЛИТЕРАТУРА

1. Дубошин Г. Н., Небесная механика. Аналитические и качественные методы, М., 1962.
2. Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961.

3. Белецкий В. В., В сб.: Искусственные спутники Земли, вып. 16, М., 1963.
4. Румянцев В. В., ПММ, 25, № 1 (1961).
5. Darboux G., Leçons sur la théorie générale des surfaces, vol. 1, Paris, 1887, chep. 2.
6. Mayer A., Ber. Sächsisch. Ges. Wiss. Math.-Phys., 40 (1896).
7. Демин В. Г., Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения, М., 1968.
8. Татевский В. М., Вестник МГУ, вып. 5, 83 (1947).
9. Raitzin C. M. A., Ann. de la Sociedad Scient. Argent., 176, No. 1—6, 62 (1963).
10. Якоби К., Лекции по динамике, Л.—М., 1936, с. 34.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
11/XI 1970

I. KEIS

GÜROSTAADI LIIKUMISE VÕRRANDITEST

Vaadeldakse gürostaadi pöörleva ja translatoorse liikumise uute, kanoonilises kujus antud ja trigonomeetrilisi avaldisi ning jõufunktsiooni mittesisaldavate võrrandite saamisviisi. Jõufunktsioon vastab niisugusele jõuväljale, mille mõjule on antud gürostaat allutatud teise, oma liikumatu massikeskme ümber pöörleva gürostaatilise süsteemi poolt. Otsitavat tüüpi võrrandite tuletamiseks kasutatakse Mayeri potentsiaali, Rodriguezi-Hamiltoni parameetreid ja Darboux' teisendust. On oluline märkida, et võrrandite uus, kanooniline kuju on suhtelise liikumise muutujate jaoks saadud tänu käesolevas töös konstrueeritud Mayeri potentsiaali avaldisele.

I. KEIS

ON THE EQUATIONS OF A GYROSTAT

In the paper a method for obtaining new equations of progressive rotation and the rotation of a gyrostat in canonical form with the Hamiltonian free from trigonometrical expressions is considered. The potential corresponds to the forces acting on a gyrostat from another gyrostatic system rotating arbitrarily around its fixed point. Deriving the equations of the necessary type one uses the potential of Mayer, Rodriguez-Hamilton parameters and the Darboux transformation. It is important to stress that this new and canonical form of equations is obtained here for the variables of the relative motion due to the construction, in this paper, of the corresponding Mayer's type potential.