EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.4.04

УДК 519.3:330.115

ИНГРИД МАУЭР

ШТРАФНАЯ КОНСТАНТА В БЛОЧНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Проблема составления в некотором смысле оптимального плана сложной системы с подсистемами часто математически формулируется как задача блочного программирования, специальные методы решения которой, как правило, являются методами планирования на двух уровнях. Так как автор считает данную работу принадлежащей, в первую очередь, к исследованиям по нелинейному блочному программированию (хотя излагаемым в работе методом можно решать и линейные задачи), то отметим здесь работы [1-9].

В работе рассматривается задача блочного программирования. Описанным для ее решения методом предусматривается планирование на двух уровнях. Центр (второй уровень) рассылает подсистемам начальный план распределения ресурсов системы между подсистемами в некоторой связи со штрафом (количества имеющихся ресурсов обозначаются через b). В подсистемах (первый уровень) решаются некоторые задачи, в решении которых обнаруживаются желаемые ими количества всех этих ресурсов — желаемый подсистемами план. Центр проектирует этот полученный от подсистем план на множество всех допускаемых центром распределений ресурсов и рассылает эту проекцию в такой же связи со штрафом обратно подсистемам и т. д. В ходе решения задачи штраф постепенно увеличивают. Доказываются сходимость при приближении штрафа к бесконечности желаемого подсистемами плана к оптимальному распределению имеющихся ресурсов системы между подсистемами и сходимость частей решений задач в подсистемах к решению поставленной задачи блочного программирования.

Рассмотрим задачу блочного программирования.

З а д а ч а I: *Найти* $x=(x_1, \ldots, x_N)$, *которая минимизирует функцию*

$$F(x)=\sum_{k=1}^{N} f_k(x_k)$$

при ограничениях

$$\sum_{k=1}^{N} g_k(x_k) \leqslant b,$$

$$x_k \in R_k \quad (k=1, \ldots, N).$$

Здесь $\tilde{x}_k=(x_{k1}, \ldots, x_{ks_k})$ — точка евклидового пространства E^{s_k} $(k=1, \ldots, N)$; $x=(x_1, \ldots, x_N) \in E^n$ $\left(n=\sum_{k=1}^{N} s_k\right)$; $\sum_{k=1}^{N} g_k(x_k)$ — m-мерная вектор-функция; $b=(b_1, \ldots, b_m)$; $R_k \subset E^{s_k}$ $(k=1, \ldots, N)$.

Предположим, что R_k $(k=1, \ldots, N)$ — выпуклые, замкнутые и ограниченные множества; $F(x)$ — выпуклая и дифференцируемая на

$R_1 \times \ldots \times R_N$ функция; $\sum\limits_{k=1}^{N} g_k(x_k)$ — выпуклая и непрерывная на $R_1 \times \ldots \times R_N$ вектор-функция.

Введем точки-переменные $u = (u_1, \ldots, u_N)$ и $v = (v_1, \ldots, v_N)$, где $u_k = (u_{1k}, \ldots, u_{mk})$ $(k = 1, \ldots, N)$ и $v_k = (v_{1k}, \ldots, v_{mk})$ $(k = 1, \ldots, N)$, $(u, v) \in E^{2mN}$. Рассмотрим следующую задачу, эквивалентную задаче I.

Задача II: *Найти $\tilde{x}$, которая минимизирует*

$$F(x)$$

при ограничениях

$$g_k(x_k) - u_k \leqslant 0 \quad (k = 1, \ldots, N),$$
$$x_k \in R_k \quad (k = 1, \ldots, N),$$
$$\|u - v\|^2_{E^{mN}} = 0, \quad \sum_{k=1}^{N} v_k \leqslant b, \quad \|v\|^2 \leqslant R,$$

где число R удовлетворяет условию

$$R \geqslant \sum_{k=1}^{N} \max_{x_k \in R_k} \|g_k(x_k)\|^2_{E^m}.$$

Обозначим

$$G_k = \{(x_k, u_k) \mid g_k(x_k) - u_k \leqslant 0,\ x_k \in R_k,\ \|u_k\|^2 \leqslant R\} \quad (k = 1, \ldots, N),$$
$$G_{N+1} = \left\{ v \mid \sum_{k=1}^{N} v_k \leqslant b,\ v^2_{rk} \leqslant R \ (r = 1, \ldots, m;\ k = 1, \ldots, N) \right\},$$
$$G = G_1 \times \ldots \times G_{N+1}.$$

Изложим метод решения задачи II.

Выберем строго возрастающую последовательность положительных чисел $\{M_l\}$, для которой $M_l \xrightarrow[l \to \infty]{} \infty$, и сведем решение задачи II к решению последовательности следующих задач II.l $(l = 1, 2, \ldots)$.

Задача II.l: *Найти $(\tilde{x}^{(l)}, \tilde{u}^{(l)}, \tilde{v}^{(l)})$, которая минимизирует функцию*

$$F(x) + M_l \|u - v\|^2$$

при ограничениях

$$(x, u, v) \in G.$$

Прежде чем доказать теорему о сходимости рассматриваемого нами метода, опишем итеративный процесс решения задачи II.l и приведем некоторые рассуждения.

Для решения задачи II.l предложим применить метод покомпонентного спуска, итеративный процесс которого в данном случае целесообразно изложить последующим образом.

Фиксируем $\tilde{v}^{(l-1)}$ (при $l = 1$ $\tilde{v}^{(0)}$ выбираем произвольно) и определяем точку $(x^{(1l)}, u^{(1l)})$ среди всех точек $G_1 \times \ldots \times G_N$, которая минимизирует $F(x) + M_l \|u - \tilde{v}^{(l-1)}\|^2$. Заметим, что для определения $(x^{(1l)}, u^{(1l)})$ необходимо решить N подзадач: найти $(x^{(1l)}_k, u^{(1l)}_k)$ среди всех элементов G_k, который минимизирует $f_k(x_k) + M_l \|u_k - \tilde{v}_k^{(l-1)}\|^2$; это для $k = 1, \ldots, N$. Эти N подзадач являются задачами выпуклого программирования.

Затем фиксируем $(x^{(1l)}, u^{(1l)})$ и определяем точку $v^{(1l)}$ среди всех точек G_{N+1}, которая минимизирует $F(x^{(1l)}) + M_l \|u^{(1l)} - v\|^2$. Эта задача разлагается на m подзадач: найти $(v^{(1l)}_{r1}, \ldots, v^{(1l)}_{rN})$, которая минимизирует $\sum_{k=1}^{N}(u_{rk}^{(1l)}-v_{rk})^2$ при ограничениях $\sum_{k=1}^{N} v_{rk} \leqslant b_r$ и $v_{rk}^2 \leqslant R$ $(k=1, \ldots, N)$; это для $r=1, \ldots, m$. Эти m подзадач являются задачами строго выпуклого квадратичного программирования.

Затем фиксируем $v^{(1l)}$ и определяем $(x^{(2l)}, u^{(2l)})$ и т. д.

Таким образом составляется последовательность $\{(x^{(il)}, u^{(il)}, v^{(il)})\}$, состоящая из конечного или бесконечного числа сходящихся подпоследовательностей, каждая из которых при указанных выше предположениях сходится к одному из решений задачи II.l [10]. Выделим среди этих подпоследовательностей одну, сходящуюся к $(x^{(l)}, u^{(l)}, v^{(l)})$.

Пусть $M^{(\text{II}.l)}$ — множество всех решений задачи II.l.

Обозначим

$$\Delta^{(l)} = \|\tilde{u}^{(l)} - \tilde{v}^{(l)}\|^2$$

и покажем, что для всех точек $(x, u, v) \in M^{(\text{II}.l)}$ $\|u-v\|^2 = \Delta^{(l)}$.

Рассмотрим функцию

$$\mu(M, \Delta^{(l)}) = \min_{(x,u,v)\in G} [F(x) + M(\|u-v\|^2 - \Delta^{(l)})].$$

Согласно [11] нам известно, что для того, чтобы M_l максимизировало $\mu(M, \Delta^{(l)})$, достаточно существования в $M^{(\text{II}.l)}$ точки (x, u, v) такой, что $\|u-v\|^2 - \Delta^{(l)} = 0$. Но такой точкой в $M^{(\text{II}.l)}$ является $(\tilde{x}^{(l)}, \tilde{u}^{(l)}, \tilde{v}^{(l)})$. Если $\Delta^{(l)} > 0$, то в G существует (x, u, v), для которой $\|u-v\|^2 < \Delta^{(l)}$ и по теореме Куна—Таккера [12] для каждой точки $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}) \in M^{(\text{II}.l)}$ $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{v}, M_l)$ является седловой точкой функции $F(x) + M(\|u-v\|^2 - \Delta^{(l)})$ в области G, $M \geqslant 0$. Но тогда для всех точек $(x, u, v) \in M^{(\text{II}.l)}$ должно быть справедливо $M_l(\|u-v\|^2 - \Delta^{(l)}) = 0$. Так как $M_l > 0$, то для всех этих точек $\|u-v\|^2 = \Delta^{(l)}$. Если $\Delta^{(l)} = 0$, то для всех точек $(x, u, v) \in M^{(\text{II}.l)}$ также справедливо $\|u-v\|^2 = \Delta^{(l)}$. Действительно, если предположить, что найдется точка $(x, u, v) \in M^{(\text{II}.l)}$, для которой $\|u-v\|^2 = \Delta > 0$, то, повторяя предыдущее рассуждение, получим, что $\Delta^{(l)} = \Delta > 0$.

Этим и доказано, что каждому числу $M_l > 0$ соответствует однозначно определенное $\Delta^{(l)}$.

Рассмотрим еще случай $M_0 = 0$ $(l = 0)$. Задача II.0 является задачей выпуклого программирования с замкнутым и ограниченным множеством ограничений. Поэтому $M^{(\text{II}.0)}$ — замкнутое и ограниченное множество. Следовательно, существует число

$$\Delta_{\min}^{(0)} = \min_{(x,u,v)\in M^{(\text{II}.0)}} \|u-v\|^2,$$

которое примем в дальнейшем за $\Delta^{(0)}$.

Прибавим к последовательности $\{M_l\}$ первый дополнительный элемент M_0.

Лемма. *Выбранной $\{M_l\}$ соответствует последовательность $\{\Delta^{(l)}\}$, для которой $\Delta^{(l)} \xrightarrow[l\to\infty]{} 0$.*

Доказательство. Покажем предварительно, что $\{\Delta^{(l)}\}$ является невозрастающей последовательностью, т. е. $\Delta^{(l)} \geqslant \Delta^{(l+1)}$; это для $l = 0, 1, \ldots$.

Предположим, что $\Delta^{(l)} < \Delta^{(l+1)}$. Как известно, $\mu(M, \Delta^{(l+1)})$ — вогнутая функция, причем, как указано выше, имеет своим максимальным значением $\mu(M_{l+1}, \Delta^{(l+1)})$. Следовательно, так как градиентом $\mu(M, \Delta^{(l+1)})$

на M_l является $\Delta^{(l)} - \Delta^{(l+1)}$ [11], значение которого, по предположению, отрицательное, то $\mu(M_l, \Delta^{(l+1)}) < \mu(M_{l+1}, \Delta^{(l+1)})$ при $M_l > M_{l+1}$, что противоречит выбору $M_l < M_{l+1}$.

Покажем, что $\Delta^{(l)} \underset{l\to\infty}{\to} 0$.

Так как $\{\Delta^{(l)}\}$ является ограниченной снизу невозрастающей последовательностью, то она сходится, т. е. $\Delta^{(l)} \underset{l\to\infty}{\to} \Delta^{(*)}$. Пусть $\Delta^{(*)} > 0$. Тогда по теореме Куна—Таккера найдется число $M_* \geqslant 0$ такое, что $(\tilde{x}^{(*)}, \tilde{u}^{(*)}, \tilde{v}^{(*)}, M_*)$ является седловой точкой для $F(x) + M(\|u - v\|^2 - \Delta^{(*)})$ в области G, $M \geqslant 0$ $(\Delta^{(*)} = \|\tilde{u}^{(*)} - \tilde{v}^{(*)}\|^2)$, т. е. числу M_* соответствует $\Delta^{(*)}$. Но поскольку $M_l \underset{l\to\infty}{\to} \infty$, то найдется такое l, что $M_* \leqslant M_l$ и, соответственно доказанному выше, $\Delta^{(*)} \geqslant \Delta^{(l)}$. Таким образом, $\Delta^{(*)}$ не может отличаться от нуля и $\Delta^{(l)} \underset{l\to\infty}{\to} 0$. Лемма доказана.

Пусть $M^{(\mathrm{II})}$ — множество всех решений задачи II.

Теорема. *Выбранной* $\{M_l\}$ *соответствует последовательность* $\{\tilde{x}^{(l)}\}$, *для которой*

$$\varrho(\tilde{x}^{(l)}, M^{(\mathrm{II})}) \underset{l\to\infty}{\to} 0.$$

Доказательство. Обозначим

$$X(\Delta^{(l)}) = \{x \mid F(x) \leqslant F(\tilde{x}),\ \|u - v\|^2 \leqslant \Delta^{(l)},\ (x, u, v) \in G\} \quad (l = 1, 2, \ldots).$$

Множество $X(\Delta^{(l)})$ содержит проекцию множества $M^{(\mathrm{II}.l)}$ на E^n точек x, т. е. содержит множество всех $\tilde{x}^{(l)}$, минимизирующих $F(x)$ при ограничениях $\|u - v\|^2 \leqslant \Delta^{(l)}$ и $(x, u, v) \in G$ [11, 12]. Действительно, из

$$\tilde{x}^{(l)} \in \{x \mid F(x) \leqslant F(\tilde{x}^{(l)}),\ \|u - v\|^2 \leqslant \Delta^{(l)},\ (x, u, v) \in G\}$$

следует, что

$$\tilde{x}^{(l)} \in X(\Delta^{(l)}), \tag{1}$$

так как $F(\tilde{x}^{(l)}) \leqslant F(\tilde{x})$. Это для $l = 1, 2, \ldots$.

Из $\Delta^{(l)} \underset{l\to\infty}{\to} 0$ (лемма) следует, что $X(\Delta^{(l)}) \underset{l\to\infty}{\to} M^{(\mathrm{II})}$ $(X(0) = M^{(\mathrm{II})})$, а из последнего, учитывая (1), вытекает $\varrho(\tilde{x}^{(l)}, M^{(\mathrm{II})}) \underset{l\to\infty}{\to} 0$. Теорема доказана.

Замечание. В описанный штрафной метод не включено решение задачи II.0; это потому, что задача II.0 не содержит штрафа $(M_0 = 0)$. Предположено, что предварительно из рассмотрения исключена такая задача I, для которой $\tilde{x}^{(0)}$ удовлетворяет системе неравенств $\sum_{k=1}^{N} g_k(\tilde{x}_k^{(0)}) \leqslant b$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Charnes A., Clower R. W., Kortanek K. O., Econometrica, 35, No. 2 (1967).
2. Аганбегян А. Г., Багриновский К. А., В сб.: Математические методы в экономике, 1968.
3. Багриновский А., В сб.: Математические методы в экономике, 1968.

4. Moeseke Paul V., Ghellinck Guy de, Econometrica, 37, No. 1 (1969).
5. Sekine Y., IEEE Trans. Circuit Theory, CT-10, No. 2 (1963).
6. Fukunaga K., Yoshida D., Papers IFAC Symp. Systems Eng. for Control System Design, Tokyo, 1965.
7. Бахтин А. Е., Горстко А. Б., В сб.: Математическое программирование, М., 1966.
8. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 18, № 1 (1969).
9. Grigoriadis M. D., Ritter K., J. Comput. and Syst. Sci., 3, No. 4 (1969).
10. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б., Авт. и телемех., 24, № 12 (1963).
11. Пшеничный Б. Н., Кибернетика, № 3 (1965).
12. Kuhn H. W., Tucker A. W., Proc. Second Berkeley Symp. Math. Statistics and Prob., Berkeley and Los Angeles, 1951.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
19/II 1971

INGRID MAUER

TRAHVIKONSTANT BLOKKPROGRAMMEERIMISEL

Blokkprogrammeerimisülesande lahendamiseks esitatakse dekompositsiooniprintsiibil baseeruv trahvimeetod, mille rakendamine on vaadeldav kahenivoolise iteratiivse protsessina.

Tõestatakse selle meetodi koonduvus.

INGRID MAUER

PENALTY CONSTANT IN BLOCK-PROGRAMMING

The penalty method for solving the problem of block-programming is represented. The method involves the decomposition principle. The application of the method for solving the problem is dealt with as an iterative two-level process.

The convergence of the method is proved.