EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.4.03

УДК 517.948.322

Ю. ЯРЦЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ МЕТОДА ФЕЙЕРОВСКОЙ КОЛЛОКАЦИИ

Ниже исследуется устойчивость одного метода интерполяционного типа, сходимость которого изучалась ранее в работах [1–4] и который естественно назвать методом фейеровской коллокации. При этом вопрос будет излагаться применительно к интегро-дифференциальным уравнениям со ссылками на некоторые результаты из [4].

Рассмотрим уравнение

$$L(x) \equiv x^{(m)} - \lambda \left[\sum_{k=0}^{m-2} p_k(t) x^{(k)} + \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{m} q_k(t,s) x^{(k)}(s)\, ds \right] = y(t) \tag{1}$$

с граничными условиями

$$L_j(x) \equiv \sum_{k=1}^{m} [\alpha_{jk} x^{(k-1)}(-1) + \beta_{jk} x^{(k-1)}(1) + \int_{-1}^{1} \gamma_{jk}(s) x^{(k-1)}(s)\, ds] = 0, \quad j = 1, \ldots, m. \tag{2}$$

Согласно методу фейеровской коллокации приближенное решение этой задачи разыскивается в виде комбинации

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \varrho_{m+k}(t), \tag{3}$$

где $\varrho_{m+k}(t)$ есть алгебраический полином степени $m+k$, удовлетворяющий условиям (2), а коэффициенты a_k $(k = 0, \ldots, 2n-1)$ определяются из системы линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &[L(x_n) - y(t)]_{t=t_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &[x_n^{(m+1)}(t)]_{t=t_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &t_i = \cos \frac{2i-1}{2n} \pi. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Как показано в [4], условия (4) можно представить в виде

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_n(t_i) - \lambda \int_{-1}^{1} R(t_i, s) \varphi_n(s)\, ds = y(t_i), \\ &\varphi'_n(t_i) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &t_i = \cos \frac{2i-1}{2n} \pi, \end{aligned}\right\} \tag{4'}$$

где ядро $R(t,s)$ определено равенством (9) из [4], а

$$\varphi_n(t) = \sum_{k=0}^{2n-1} a_k \varrho_{m+k}^{(m)}(t). \tag{3'}$$

Обозначая $\varrho_{m+k}^{(m)}(t) = \delta_k(t)$ и принимая во внимание (3′), можем написать теперь систему коллокации (4) следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2n-1} a_k \left[\delta_k(t_i) - \lambda \int_{-1}^{1} R(t_i, s)\,\delta_k(s)\,ds\right] = y(t_i),\\ &\sum_{k=0}^{2n-1} a_k \delta'_k(t_i) = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,\\ &\qquad\qquad t_i = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi. \end{aligned}\right\} \tag{4''}$$

Тогда, очевидно, возмущенная система коллокации, получающаяся практически при составлении системы (4), может быть записана в форме

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2n-1} \tilde{a}_k \left[\delta_k(t_i) - \lambda \int_{-1}^{1} R(t_i, s)\,\delta_k(s)\,ds + \gamma_{ik}\right] = y(t_i) + y_i,\\ &\sum_{k=0}^{2n-1} \tilde{a}_k [\delta'_k(t_i) + \gamma'_{ik}] = 0, \qquad i = 1, \ldots, n,\\ &\qquad\qquad t_i = \cos\frac{2i-1}{2n}\pi. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Обозначим через Γ_{2n} матрицу погрешностей γ_{ik} и γ'_{ik}, а через $y_{(2n)}$ вектор погрешностей свободных членов. Под символом $\|Z_{2n}\|$ для матрицы $Z_{2n} = (z_{ij})_{\substack{i=1,\ldots,2n\\ j=1,\ldots,2n}}$ будем подразумевать $\max\limits_i \{\sum\limits_j z_{ij}^2\}^{1/2}$, а под символом $\|u_{(2n)}\|$ для вектора $u_{(2n)} = (u_1, u_2, \ldots, u_{2n})$ — норму $\max\limits_i |u_i|$. Пусть, кроме того, $\tilde{x}_n(t)$ есть полином типа (3) с коэффициентами, удовлетворяющими возмущенной системе коллокации (5). Тогда имеет место

Теорема. *Если координатные полиномы $\varrho_{m+k}(t)$ таковы, что их m-е производные ортонормированы по весу $\omega(t) \geqslant 0$ на отрезке $[-1, 1]$, то метод фейеровской коллокации (3)—(4) устойчив в следующем смысле: найдутся такие не зависящие от n постоянные p_j, q_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, m)$ и r, что для $n \geqslant n_0$ и при $\|\Gamma_{2n}\| \leqslant r$ возмущенная система коллокации (5) однозначно разрешима и имеют место неравенства*

$$\|x_n^{(j)} - \tilde{x}_n^{(j)}\|_{C[-1,1]} \leqslant p_j \|\Gamma_{2n}\| + q_j \|y_{(2n)}\|,$$

$$j = 0, 1, \ldots, m.$$

Доказательство. Положим

$$R_i(s) = -(\lambda)^{-1} \sum_{k=0}^{2n-1} \delta_k(s)\,\omega(s)\,\gamma_{ik},$$

$$\overline{R}_i(s) = -(\lambda)^{-1} \sum_{k=0}^{2n-1} \delta_k(s)\,\omega(s)\,\gamma'_{ik}.$$

Тогда систему (5) можно записать в виде

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{2n-1}\tilde{a}_k\left\{\delta_k(t_i)-\lambda\int_{-1}^{1}[R(t_i,s)+R_i(s)]\delta_k(s)\,ds\right\}=y(t_i)+y_i,\\ &\sum_{k=0}^{2n-1}\tilde{a}_k\left\{\delta'_k(t_i)-\lambda\int_{-1}^{1}\overline{R}_i(s)\delta_k(s)\,ds\right\}=0,\qquad i=1,\ldots,n,\\ &\qquad\qquad t_i=\cos\frac{2i-1}{2n}\pi. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда, перегруппировав члены, получаем

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\varphi}_n(t_i)-\lambda\int_{-1}^{1}[R(t_i,s)+R_i(s)]\tilde{\varphi}_n(s)\,ds=y(t_i)+y_i,\\ &\tilde{\varphi}'_n(t_i)-\lambda\int_{-1}^{1}\overline{R}_i(s)\tilde{\varphi}_n(s)\,ds=0,\qquad i=1,\ldots,n, \end{aligned}\right\}\tag{5'}$$

где $\tilde{\varphi}_n(t)=\sum_{k=0}^{2n-1}\tilde{a}_k\delta_k(t)$.

Пусть $A_i^{(n)}(t)$ $(i=1,\ldots,n)$ и $B_i^{(n)}(t)$ $(i=1,\ldots,n)$ суть алгебраические полиномы степени $2n-1$, удовлетворяющие в точках $t_i=$ $=\cos\frac{2i-1}{2n}\pi$ условиям:

$$A_i^{(n)}(t_j)=\begin{cases}1 \text{ при } j=i,\\ 0 \text{ при } j\neq i;\end{cases}\qquad [B_i^{(n)}(t_j)]'=\begin{cases}1 \text{ при } j=i,\\ 0 \text{ при } j\neq i;\end{cases}$$

$[A_i^{(n)}(t_j)]'=B_i^{(n)}(t_j)=0$ при $i,j=1,2,\ldots,n$. Тогда для любого полинома $P(t)$ степени не выше $2n-1$ имеем

$$\sum_{i=1}^{n}P(t_i)A_i^{(n)}(t)+P'(t_i)B_i^{(n)}(t)=P(t).\tag{6}$$

Умножая первые n уравнений системы (5′) на соответствующие $A_i^{(n)}(t)$, а следующие уравнения на соответствующие $B_i^{(n)}(t)$, суммируя полученные равенства и учитывая (6), получим уравнение

$$\tilde{\varphi}_n-\lambda\int_{-1}^{1}\tilde{R}_n(t,s)\tilde{\varphi}_n(s)\,ds=\tilde{f}_n(t),\tag{7}$$

где

$$\tilde{R}_n(t,s)=\sum_{i=1}^{n}[R(t_i,s)+R_i(s)]A_i^{(n)}(t)+\overline{R}_i(s)B_i^{(n)}(t),\tag{8}$$

$$\tilde{f}_n(t)=\sum_{i=1}^{n}[y(t_i)+y_i]A_i^{(n)}(t).$$

Очевидно, что решением этого уравнения является полином вида (3′) с коэффициентами, удовлетворяющими системе (5). Проведя над уравнениями системы (4′) аналогичные преобразования, получим уравнение, эквивалентное названной системе,

$$\varphi_n-\lambda\int_{-1}^{1}R_n(t,s)\varphi_n(s)\,ds=f_n(t),\tag{9}$$

где

$$R_n(t,s)=\sum_{i=1}^{n} R(t_i,s)A_i^{(n)}(t),$$

$$f_n(t)=\sum_{i=1}^{n} y(t_i)A_i^{(n)}(t). \tag{10}$$

Обозначим теперь через $\tilde{T}_n$ интегральный оператор с ядром (8) и через T_n интегральный оператор с ядром (10). Тогда уравнения (7) и (9) можно будет представить в форме

$$\tilde{H}_n\tilde{\varphi}_n\equiv(E-\lambda\tilde{T}_n)\tilde{\varphi}_n=\tilde{f}_n \tag{7'}$$

и

$$H_n\varphi_n\equiv(E-\lambda T_n)\varphi_n=f_n \tag{9'}$$

соответственно (E — тождественный оператор).

Как показано в [4], операторы $H_n=E-\lambda T_n$ $(n=n_0,\ n_0+1,\ \ldots)$ обратимы, причем $\|H_n^{-1}\|\leqslant A<+\infty$, $H_n^{-1}\in[C[-1,1]\to C[-1,1]]$, где A — некоторая постоянная, не зависящая от n (см. соотношение (16) из [4], $\Phi_nT=T_n$). Рассмотрим теперь операцию $\tilde{H}_n$. Имеем

$$\tilde{H}_n=\lambda(T_n-\tilde{T}_n)+H_n,$$

но

$$\|\lambda(T_n-\tilde{T}_n)\|=|\lambda|\max_{t\in[-1,1]}\int_{-1}^{1}|R_n(t,s)-\tilde{R}_n(t,s)|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\max_{t\in[-1,1]}\Big[\sum_{i=1}^{n}A_i^{(n)}(t)\int_{-1}^{1}\Big|\sum_{k=0}^{2n-1}\omega(s)\delta_k(s)\gamma_{ik}\Big|\,ds+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}|B_i^{(n)}(t)|\int_{-1}^{1}\Big|\sum_{k=0}^{2n-1}\omega(s)\delta_k(s)\gamma'_{ik}\Big|\,ds\Big].$$

Применяя теперь неравенство Буняковского и учитывая ортонормированность полиномов $\delta_k(s)$, получаем

$$\int_{-1}^{1}\Big|\sum_{k=0}^{2n-1}\omega(s)\delta_k(s)\gamma_{ik}\Big|ds=\int_{-1}^{1}\sqrt{\omega(s)}\,\Big|\sum_{k=0}^{2n-1}\sqrt{\omega(s)}\,\delta_k(s)\gamma_{ik}\Big|\,ds\leqslant$$

$$\leqslant\Big[\int_{-1}^{1}\omega(s)\,ds\Big]^{1/2}\Big\{\int_{-1}^{1}\omega(s)\Big[\sum_{k=0}^{2n-1}\delta_k(s)\gamma_{ik}\Big]^2 ds\Big\}^{1/2}=$$

$$=\Big[\int_{-1}^{1}\omega(s)\,ds\Big]^{1/2}\Big[\sum_{k=0}^{2n-1}\gamma_{ik}^2\Big]^{1/2}.$$

Аналогично

$$\int_{-1}^{1}\Big|\sum_{k=0}^{2n-1}\omega(s)\delta_k(s)\gamma'_{ik}\Big|\,ds\leqslant\Big[\int_{-1}^{1}\omega(s)\,ds\Big]^{1/2}\Big[\sum_{k=0}^{2n-1}\gamma'^{2}_{ik}\Big]^{1/2}.$$

Учитывая далее, что

$$\sum_{i=1}^{n}A_i^{(n)}(t)=1,\qquad \sum_{i=1}^{n}|B_i^{(n)}(t)|\leqslant 1,$$

имеем

$$\|\lambda(T_n-\tilde{T}_n)\|\leqslant 2\Big[\int_{-1}^{1}\omega(s)\,ds\Big]^{1/2}\|\Gamma_{2n}\|=\Omega\|\Gamma_{2n}\|. \tag{11}$$

Пусть матрица погрешностей Γ_{2n} такова, что

$$\|\Gamma_{2n}\| \leqslant (\Omega A)^{-1}\beta \equiv r, \quad 0 < \beta < 1. \tag{12}$$

Тогда

$$\|\lambda(T_n - \tilde{T}_n)\| \leqslant \beta \|H_n^{-1}\|^{-1}, \quad n \geqslant n_0,$$

и на основании известной теоремы об обратимости линейной вполне непрерывной операции существует операция $\tilde{H}_n^{-1}$, причем

$$\|\tilde{H}_n^{-1}\| \leqslant A(1-\beta)^{-1}. \tag{13}$$

Итак, для $n \geqslant n_0$ и при условии (12) операция $\tilde{H}_n$ обратима, а это значит, что при названных условиях возмущенная система коллокации (5) однозначно разрешима.

Из (8) и (10) следует

$$\tilde{f}_n = f_n + \sum_{i=1}^{n} y_i A_i^{(n)}(t).$$

Учитывая это равенство, а также (7′) и (9′), можем написать

$$\tilde{H}_n(\tilde{\varphi}_n - \varphi_n) = \lambda(T_n - \tilde{T}_n)\varphi_n + \sum_{i=1}^{n} y_i A_i^{(n)}(t),$$

откуда

$$\|\tilde{\varphi}_n - \varphi_n\| \leqslant \|\tilde{H}_n^{-1}\| \left[\|\lambda(\tilde{T}_n - T_n)\| \, \|\varphi_n\| + \left\|\sum_{i=1}^{n} y_i A_i^{(n)}(t)\right\| \right]$$

(для функций берется норма в пространстве $C[-1, 1]$).

Принимая теперь во внимание (11) и (13) и учитывая, что

$$\|\varphi_n\| \leqslant \|H_n^{-1}\| \, \|f_n\| \leqslant A\|y\| \quad \text{и} \quad \left\|\sum_{i=1}^{n} y_i A_i^{(n)}(t)\right\| \leqslant \|y_{(2n)}\|,$$

получаем

$$\|\tilde{\varphi}_n - \varphi_n\| \leqslant p\|\Gamma_{2n}\| + q\|y_{(2n)}\|, \tag{14}$$

где

$$p = A^2\Omega(1-\beta)^{-1}\|y\|, \quad q = A(1-\beta)^{-1}.$$

Однако полиномы x_n и $\tilde{x}_n$ удовлетворяют граничным условиям (2), а их m-е производные равны φ_n и $\tilde{\varphi}_n$ соответственно. Поэтому можем написать

$$x_n = \int_{-1}^{1} g(t,s)\varphi_n(s)\,ds, \quad \tilde{x}_n = \int_{-1}^{1} g(t,s)\tilde{\varphi}_n(s)\,ds$$

($g(t, s)$ — функция Грина оператора $\dfrac{d^m}{dt^m}$ при условиях (2)). Из этих равенств с учетом (14) вытекает, что

$$\|x_n^{(i)} - \tilde{x}_n^{(i)}\|_{C[-1,1]} \leqslant p_i\|\Gamma_{2n}\| + q_i\|y_{(2n)}\|, \quad i = 0, \ldots, m,$$

где

$$p_i = p \max_{t\in[-1,1]} \int_{-1}^{1} \left| \frac{\partial^i}{\partial t^i} g(t,s) \right| ds, \quad i = 0, \ldots, m-1,$$

$$q_i = q \max_{t\in[-1,1]} \int_{-1}^{1} \left| \frac{\partial^i}{\partial t^i} g(t,s) \right| ds, \quad i = 0, \ldots, m-1,$$

$$p_m = p, \quad q_m = q.$$

Этим теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Киш О., Magyar tud. akad. Mat. kutató int. közl., 3, № 1—2, 25 (1958).
2. Петерсен И., Изв. АН ЭССР, Сер. физ.-матем. и техн. н., X, 3 (1961).
3. Ярцев Ю., Ж. выч. матем. и матем. физ., 7, 892 (1967).
4. Ярцев Ю., Тр. Таллинск. политехн. ин-та, Сер. А, № 216, 39 (1968).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 9/II 1971

J. JARTSEV

FEJERI KOLLOKATSIOONIMEETODI STABIILSUSEST

Artiklis vaadeldakse Fejeri kollokatsioonimeetodi stabiilsust rajaülesande (1)—(2) puhul.

J. JARZEW

ÜBER DIE STABILITÄT DER FEJERSCHEN KOLLOKATIONSMETHODE

Im Artikel wird die Stabilität der fejerschen Kollokationsmethode für die Lösung der Grenzaufgabe (1)—(2) betrachtet.