EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.4.02

УДК 517.948:513.88:518

О. ВААРМАНН

ПРИБЛИЖЕНИЯ ПСЕВДООБРАТНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРИМЕНЕНИИ К РЕШЕНИЮ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Для решения нелинейных уравнений в гильбертовом пространстве описаны итерационные методы, основанные на аппроксимации псевдообратных операторов. Для построения приближений к псевдообратным операторам использованы итерационные методы и многочлены Чебышева. Модифицированы некоторые условия общей теоремы [1, 2], утверждающей сходимость такого типа итерационных методов к решению уравнения $[F'(x)]^*F(x)=0$, где $F(x)$ — некоторый оператор из одного гильбертова пространства H_1 в другое H_2.

Настоящая статья тесно примыкает к работе [2] и является ее дополнением и расширением, поэтому используем здесь те же обозначения.

Пусть A — некоторый линейный ограниченный оператор из H_1 в H_2, имеющий замкнутую область значений $R(A)$; A^* и A^+ — соответственно его сопряженный и псевдообратный операторы; а $P_{R(A)}$ и $P_{R(A^*)}$ — соответственно операторы ортогональной проекции H_2 на $R(A)$ и H_1 на $R(A^*)$.

Нетрудно доказать следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть $\bar{A}^*$ и $I_{R(A)}$ — соответственно сужения операторов A^* и $P_{R(A)}$ на $R(A)$, а $\bar{A}$ — сужение оператора A на $R(A^*)$, тогда*

$$\|P_{R(A)}-\alpha AA^*\|=\|I_{R(A)}-\alpha\bar{A}\bar{A}^*\|\leqslant\max\{|1-\alpha m^2|,|1-\alpha M^2|\}<1,$$

где $0<\alpha<\dfrac{2}{M^2}$, m^2 и M^2 — соответственно наименьшая и наибольшая точки спектра оператора $\bar{A}\bar{A}^*$.

Теорема 1. *Пусть X_0 — некоторый линейный оператор, удовлетворяющий условиям*

1° $X_0=X_0P_{R(A)}=P_{R(A^*)}X_0$;
2° $\|T_0\|=\|P_{R(A)}-AX_0\|<1$.

Тогда процесс

$$X_{k+1}=X_k[P_{R(A)}+T_k+\ldots+T_k^{p-1}]\quad(p\geqslant 2;\ k=0,\ 1,\ \ldots),\tag{I}$$

где $T_k=P_{R(A)}-AX_k$, при $k\to\infty$ сходится к A^+, причем

$$T_{k+1}=T_k^p,$$

$$\|A^+-X_{k+1}\|\leqslant\frac{\|X_{k+1}T_{k+1}\|}{1-\|T_{k+1}\|}.$$

Доказательство. По свойству проектора $P = P^q (q \geqslant 1)$ и предположения 1° имеем

$$T_0 = P_{R(A)}^2 - AX_0P_{R(A)} = T_0P_{R(A)},$$

$$T_0^q = T_0^q P_{R(A)}^q = T_0^q P_{R(A)},$$

$$X_1 = X_0[P_{R(A)}^2 + T_0P_{R(A)} + \ldots + T_0^{p-1}P_{R(A)}] = X_1P_{R(A)}.$$

Допустим, что $X_k = X_kP_{R(A)}$ и $T_k = T_kP_{R(A)}$ $(k \geqslant 2)$, тогда подобным же образом, как и выше, находим, что

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= X_{k+1}P_{R(A)}, \\ T_{k+1} &= T_{k+1}P_{R(A)}. \end{aligned} \tag{II}$$

Как известно, $AA^+A = P_{R(A)}A = A$, поэтому

$$T_k = P_{R(A)}^2 - P_{R(A)}AX_k = P_{R(A)}(P_{R(A)} - AX_k) = P_{R(A)}T_k, \tag{III}$$

$$T_k^q - AX_kT_k^q = (P_{R(A)} - AX_k)T_k^q = T_k^{q+1} \quad (q \geqslant 1). \tag{IV}$$

С учетом тождества (IV) имеем

$$T_{k+1} = P_{R(A)} - AX_{k+1} = T_k - AX_kT_k - \ldots - AX_kT_k^{p-1} = \ldots =$$

$$= T_k^{p-1} - AX_kT_k^{p-1} = T_k^p.$$

Пусть $X_k = P_{R(A^*)}X_k$, тогда, очевидно,

$$X_{k+1} = P_{R(A^*)}X_k[P_{R(A)} + T_k + \ldots + T_k^{p-1}] = P_{R(A^*)}X_{k+1}$$

и далее согласно (II) и (5)—(8) из [2] имеем

$$(A^+ - X_{k+1}) - (A^+ - X_{k+1})(P_{R(A)} - AX_{k+1}) = X_{k+1} - X_{k+1}AX_{k+1} = X_{k+1}T_{k+1},$$

$$\|X_{k+1}T_{k+1}\| = \|(A^+ - X_{k+1}) - (A^+ - X_{k+1})T_{k+1}\| \geqslant$$

$$\geqslant \|A^+ - X_{k+1}\| - \|A^+ - X_{k+1}\| \, \|T_{k+1}\| = \|A^+ - X_{k+1}\|(1 - \|T_{k+1}\|),$$

откуда

$$\|A^+ - X_{k+1}\| \leqslant \frac{\|X_{k+1}T_{k+1}\|}{1 - \|T_{k+1}\|} \leqslant \frac{\|X_{k+1}\| \, \|T_0^{p^{k+1}}\|}{1 - \|T_0^{p^{k+1}}\|}.$$

Из [3] известно, что существует ограниченный оператор $(\bar{A})^{-1}$. Нетрудно убедиться, что $\|A^+\| = \|(\bar{A})^{-1}\|$, и поэтому оператор X_{k+1} также ограничен

$$\|X_{k+1}\| = \|A^+[P_{R(A)} - (P_{R(A)} - AX_{k+1})]\| \leqslant \|A^+\|(1 + \|T_{k+1}\|).$$

Таким образом, $\lim\limits_{k\to\infty} X_k = A^+$ в силу $\|T_0\| < 1$.

Замечание 1. Пусть $D_k = I_2 - AX_k$, где I_2 — единичный оператор в H_2, тогда $P_{R(A)}T_k = T_k = P_{R(A)}D_k$ (см. (III)). Учитывая также (II), формулу (I) можно переписать в виде

$$X_{k+1} = X_k[I_2 + D_k + \ldots + D_k^{p-1}] \quad (k = 0,\ 1,\ \ldots). \tag{1A}$$

Следствие 1. *Пусть* $X_0 = \alpha A^*$, $0 < \alpha < \frac{2}{M^2}$, *тогда*

$$X_0 = \alpha A^* = \alpha A^* A A^+ = X_0 P_{R(A)};$$
$$X_0 = \alpha A^* = \alpha A^+ A A^* = P_{R(A^*)} X_0,$$

и с учетом леммы 1

$$\|T_0\| = \|P_{R(A)} - \alpha A A^*\| \leqslant \max\{|1 - \alpha m^2|, \ |1 - \alpha M^2|\} < 1.$$

1. Пусть

$$\varphi(x) = \|F(x)\|^2, \tag{1}$$

где $F(x)$ — некоторый оператор из H_1 в H_2, и поставим вопрос о минимизации этого функционала. Из необходимого условия стационарности $\operatorname{grad}\varphi(x) = 0$ получаем

$$[F'(x)]^* F(x) = 0. \tag{2}$$

Для решения этого уравнения построим итерационные методы вида

$$x_{k+1} = x_k - A_k F(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots), \tag{3}$$

где A_k — некоторые приближения к псевдообратным операторам $[F'(x_k)]^+$. Исходя из формулы (ср. (I) и (IA))

$$X_1 = X_0[I_2 + T_0 + \ldots + T_0^p]$$

и полагая $X_1 = A_k^{(p)}$, $X_0 = \alpha_k[F'(x_k)]^*$, $P_{R(A)} = P_k$, $T_0 \equiv S_k = P_k - \alpha_k F'(x_k)[F'(x_k)]^*$, для нахождения A_k получим следующую формулу:

$$A_k \equiv A_k^{(p)} = \alpha_k [F'(x_k)]^* [I_2 + S_k + \ldots + S_k^p] \quad (k = 0, 1, \ldots), \tag{4}$$

где $0 < \alpha_k < \frac{2}{M^2}$, $\|F'(x)\| \leqslant M$, $p \geqslant 0$.

Такой способ определения A_k описан в [1], а при $p = 0, 1, 2$ также в [2].

В настоящей работе для повышения точности аппроксимации операторов $[F'(x_k)]^+$ операторами A_k применим многочлены Чебышева.

Образуем линейную комбинацию [4,5]

$$A_k \equiv B_k^{(p)} = \sum_{i=0}^{p} a_{p,i} A_k^{(i)}, \qquad (p \geqslant 0) \tag{5}$$

где коэффициенты $a_{p,i}$ удовлетворяют условию

$$\sum_{i=0}^{p} a_{p,i} = 1. \tag{6}$$

Из $S_k = P_k - \alpha_k F'(x_k)[F'(x_k)]^*$ следует, что $[F'(x_k)]^+(P_k - S_k) = \alpha_k[F'(x_k)]^*$, поэтому

$$A_k^{(p)} = \alpha_k[F'(x_k)]^* S_k^p + \alpha_k[F'(x_k)]^* S_k^{p-1} + \ldots + \alpha_k[F'(x_k)]^* =$$
$$= \alpha_k[F'(x_k)]^* S_k^p - [F'(x_k)]^+ S_k^p + [F'(x_k)]^+. \tag{7}$$

На основании (5)—(7) получим

$$B_k^{(p)} = (\alpha_k[F'(x_k)]^* - [F'(x_k)]^+) a_{p,p} S_k^p + a_{p,p}[F'(x_k)]^+ +$$
$$+ (\alpha_k[F'(x_k)]^* - [F'(x_k)]^+) a_{p,p-1} S_k^{p-1} + a_{p,p-1}[F'(x_k)]^+ + \dots$$
$$+ a_{p,1}[F'(x_k)]^+ + a_{p,0}(\alpha_k[F'(x_k)]^* - [F'(x_k)]^+) + a_{p,0}[F'(x_k)]^+ = \tag{8}$$
$$= (\alpha_k[F'(x_k)]^* - [F'(x_k)]^+) W_p(S_k) + [F'(x_k)]^+,$$

откуда

$$\|P_k - F'(x_k) A_k\| = \|P_k - F'(x_k) B_k^{(p)}\| \leqslant$$
$$\leqslant \|W_p(S_k)\| \, \|P_k - \alpha_k F'(x_k)[F'(x_k)]^*\|, \tag{9}$$

где $W_p(t) = \sum_{i=0}^{p} a_{p,i} t^i$ — многочлен степени $\leqslant p$, удовлетворяющий условию

$$W_p(1) = 1. \tag{10}$$

В силу самосопряженности P_k и $F'(x_k)[F'(x_k)]^*$ оператор S_k также является самосопряженным. Поэтому, если λ — некоторое собственное значение оператора S_k ($|\lambda| \leqslant \mu$), то $W_p(\lambda)$ — собственное значение оператора $W_p(S_k)$ и

$$|W_p(\lambda)| \leqslant \|W_p(S_k)\| = \sup_{\lambda \in z} |W_p(\lambda)| \leqslant \sup_{-\mu \leqslant t \leqslant \mu} |W_p(t)| = \eta_p, \tag{11}$$

где z — спектр оператора S_k и $\|P_k - \alpha_k F'(x_k)[F'(x_k)]^*\| \leqslant \mu_k$, $\mu = \sup_k \{\mu_k\}$.

Если положить

$$W_p(t) = \left\{ \frac{T_p(t/\mu)}{T_p(1/\mu)} \right\},$$

где $T_p(x) = \sum_{i=0}^{p} a_{p,i} x^i$ — многочлен Чебышева, тогда $\eta_p = \dfrac{1}{|T_p(1/\mu)|}$ и

$$\|P_k - F'(x_k) B_k^{(p)}\| \leqslant \frac{\|P_k - \alpha_k F'(x_k)[F'(x_k)]^*\|}{T_p(1/\mu)}. \tag{12}$$

Например, при $p = 2$ из (4) и (5) с учетом замечания 1 получаем соответственно

$$\|P_k - F'(x_k) A_k^{(2)}\| \leqslant \mu^3, \quad \|P_k - F'(x_k) B_k^{(2)}\| \leqslant \frac{\mu^3}{2 - \mu^2};$$

при $p = 3$

$$\|P_k - F'(x_k) A_k^{(3)}\| \leqslant \mu^4, \quad \|P_k - F'(x_k) B_k^{(3)}\| \leqslant \frac{\mu^4}{4 - 3\mu^2}.$$

Так как, в общем, $T_p(x) = \frac{1}{2}[(x + \sqrt{x^2 - 1})^p + (x - \sqrt{x^2 - 1})^p]$ для $|x| \geqslant 1$, то легко убедиться, что $\dfrac{1}{T_p(1/\mu)} < \dfrac{2\mu^p}{(1 + \sqrt{1 - \mu^2})^p}$, и согласно (4), (5) и (12) имеем

$$\|P_k - F'(x_k) A_k^{(p)}\| \leqslant \mu^{p+1}, \tag{13}$$

$$\|P_k - F'(x_k) B_k^{(p)}\| \leqslant \frac{2\mu^{p+1}}{(1+\sqrt{1-\mu^2})^p}. \tag{14}$$

Сформулируем теперь две теоремы о сходимости методов (3), (4) и (3), (5) к решению уравнения (2). В качестве примера докажем одну из них.

Теорема 2. *Пусть* $x_0 \in H_1$, $S = \{x \in H_1 : \|x - x_0\| \leqslant \varrho\}$, *на* S *выполнены условия* 1°, 2° *теоремы* 1 [2] *и*

а) $R(x_k) \supseteq R(x_{k+1})$;

б) $\lambda_p = \min\left\{\frac{2}{M}(1+\mu+\ldots+\mu^p),\ C(1+\mu^{p+1})\right\}$;

в) $\delta_0^{(p)} = \mu^{p+1} + \frac{1}{2} L\lambda_p^2 \|P_0 F(x_0)\| < 1$.

Тогда, если $r_1 = \lambda_p \|P_0 F(x_0)\| / (1 - \delta_0^{(p)})$, *то уравнение* $[F'(x)]^* F(x) = 0$ *имеет в* S *решение* x^*, $\|x_0 - x^*\| \leqslant r_1$, *к которому сходится последовательность* (3), (4), *причем*

$$\|x_k - x^*\| \leqslant r_1 \prod_{i=0}^{k-1} \delta_i^{(p)} \leqslant r_1 (\delta_0^{(p)})^k,$$

где $\delta_i^{(p)} = \mu^{p+1} + \frac{1}{2} L\lambda_p^2 \|P_i F(x_i)\|$.

Доказательство. Как известно, $P_k = P_k^q$ $(q \geqslant 1)$ и

$$P_k^* [F'(x_k)]^* = [F'(x_k)]^* = [F'(x_k)]^* P_k, \tag{15}$$

поэтому

$$A_k = A_k^{(p)} P_k = A_k P_k, \tag{16}$$

$$A_k = P_k^* A_k^{(p)} = P_k^* A_k. \tag{17}$$

Согласно (4), (13) и (15) имеем

$$\|P_k F(x_k) - F'(x_k) A_k F(x_k)\| \leqslant \|P_k - F'(x_k) A_k^{(p)}\| \, \|P_k F(x_k)\| \leqslant$$
$$\leqslant \mu^{p+1} \|P_k F(x_k)\|.$$

Таким образом, для выполнения условия 3° теоремы 1 [2] достаточно принять $\gamma = \mu^{p+1}$.

Далее, по предположению 2° теоремы 1 [2] $F'(x)$ имеет замкнутую область значений и

$$\|F'(x)\| \leqslant \|F'(x_0)\| + L\|x - x_0\| \leqslant \|F'(x_0)\| + L\varrho = K,$$

т. е. оператор $F'(x)$ ограничен. Тогда по определению псевдообратного оператора [3] существует единственный псевдообратный оператор $[F'(x)]^+$, причем нетрудно убедиться, что $\|[F'(x)]^+\| \leqslant C$ (C — некоторая постоянная).

Следовательно, имея в виду (15) и (17), можно записать

$$\|A_k^{(p)}\| = \|[F'(x_k)]^+ (F'(x_k) A_k^{(p)} - P_k) + [F'(x_k)]^+\| \leqslant C(1 + \mu^{p+1}).$$

С другой стороны, с учетом (4) имеем

$$\|A_k^{(p)}\| \leqslant \frac{2}{M}(1+\mu+\ldots+\mu^p). \quad (18)$$

Очевидно, условия 4° и 5° теоремы 1 [2] выполнены, если соответственно положить $\lambda=\lambda_p$ и $\delta_0=\delta_0^{(p)}$.

Аналогичным образом можно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $x_0 \in H_1$, $S=\{x\in H_1 : \|x-x_0\| \leqslant \varrho\}$, на S *выполнены условия* 1°, 2° *теоремы* 1 [2] *и*

а) $R(x_k) \supseteq R(x_{k+1})$;

б) $\lambda_p = \min\left\{\frac{2}{M}(1+\mu+\ldots+\mu^p)\sum_{i=0}^{p}|a_{p,i}|,\ C(1+\mu\eta_p)\right\}$;

в) $\delta_0^{(p)} = \mu\eta_p + \frac{1}{2}L\lambda_p^2\|P_0F(x_0)\| < 1$.

Тогда, если $r_1 = \lambda_p\|P_0F(x_0)\|/(1-\delta_0^{(p)})$, *то уравнение* $[F'(x)]^*F(x) = 0$ *имеет в* S *решение* x^*, $\|x_0-x^*\| < r_1$, *к которому сходится последовательность* (3), (5), *причем*

$$\|x_k-x^*\| \leqslant r_1\prod_{i=0}^{k-1}\delta_i^{(p)} \leqslant r_1(\delta_0^{(p)})^k, \quad \delta_i^{(p)} = \mu\eta_p + \frac{1}{2}L\lambda_p^2\|P_iF(x_i)\|.$$

Отметим, что сходимость методов типа (3) к решению уравнения (2) можно доказать и в более общем случае, если вместо $R(x_k)\supseteq R(x_{k+1})$ потребовать, чтобы

$$\|(P_{R(y)}-P_{R(y)}P_{R(x)})F(x)\| \leqslant N\|P_{R(x)}F(x)\| \quad (19)$$

или

$$\|(P_{k+1}-P_{k+1}P_k)F(x_k)\| \leqslant N_1\|P_kF(x_k)\|, \quad (20)$$

а условие 5° теоремы 1 [2] заменить на

$$\delta_0 = \gamma + N + \frac{1}{2}L\lambda^2\|P_0F(x_0)\| < 1. \quad (21)$$

В самом деле, из формулы Тейлора следует

$$P_{k+1}F(x_{k+1}) = P_{k+1}F(x_k) - P_{k+1}F'(x_k)A_kF(x_k) + R =$$
$$= P_{k+1}P_kF(x_k) - P_{k+1}F'(x_k)A_kP_kF(x_k) + P_{k+1}F(x_k) - P_{k+1}P_kF(x_k) + R,$$

где

$$R = \int_0^1 P_{k+1}[F'(x_k) - F'(x_k + t(x_{k+1}-x_k))]A_kF(x_k)\,dt,$$

и, следовательно,

$$\|P_{k+1}F(x_{k+1})\| \leqslant (\gamma_k + N + \frac{1}{2}L\lambda^2\|P_kF(x_k)\|)\|P_kF(x_k)\| = \delta_k\|P_kF(x_k)\|.$$

Из выражений для δ_k видно, что в данном случае получим только линейную скорость сходимости (дальше см. доказательство теоремы 1 [2]).

З а м е ч а н и е 2. В предположении, что $R(x_k) \supseteq R(x_{k+1})$, условия (19) и (20), очевидно, выполнены при $N=0$, $N_1=0$, получим теорему 1 [2].

З а м е ч а н и е 3. В частном случае, если $H_1 = H_2 = H$ и оператор $F'(x)$ — самосопряженный, причем

$$m(h,h) \leqslant (F'(x)h,h) \leqslant M(h,h) \quad (0 < m \leqslant M;\ h \in H),$$

то для решения уравнения $F(x)=0$ можно применять следующие итерационные методы ($p \geqslant 0$):

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - A_k F(x_k), & (3') \\ A_k = \alpha_k [I + S_k + \ldots + S_k^p], & (4') \end{cases}$$

где $S_k = I - \alpha_k F'(x_k)$, I — единичный оператор, $0 < \alpha_k < \dfrac{2}{M}$, а также

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k - A_k F(x_k), & (3') \\ A_k = \sum\limits_{i=0}^{p} a_{p,i} A_k^{(i)}, & (5') \end{cases}$$

где $A_k^{(i)} = \alpha_k [I + S_k + \ldots + S_k^{(i)}]$, $a_{p,i}$ — коэффициенты многочлена $W_p(t) = \{T_p(t/\mu)/T_p(1/\mu)\}$.

Выясним теперь зависимость величин $\delta_k^{(p)}$ от значений p в предположении, что рассматриваемые процессы сходятся. Ради простоты записи рассмотрим случай, где A_k $(k=0,1,\ldots)$ определяются по формуле (4). Тогда имеем

$$\delta_k^{(p)} = \mu^{p+1} + \frac{1}{2} L\lambda_p^2 \|P_k F(x_k)\|,$$

$$\delta_k^{(p+1)} = \mu^{p+2} + \frac{1}{2} L\lambda_{p+1}^2 \|P_k F(x_k)\|,$$

$$\lambda_p = \min\left\{\frac{2}{M}(1+\mu+\ldots+\mu^p),\ C(1+\mu^{p+1})\right\},$$

$$\lambda_{p+1} = \min\left\{\frac{2}{M}(1+\mu+\ldots+\mu^{p+1}),\ C(1+\mu^{p+2})\right\}.$$

Далее,

$$\|P_k F(x_k)\|_p \leqslant \|P_0 F(x_0)\| \prod_{i=0}^{k-1} \delta_i^{(p)},$$

$$\|P_k F(x_k)\|_{p+1} \leqslant \|P_0 F(x_0)\| \prod_{i=0}^{k-1} \delta_i^{(p+1)}.$$

Поэтому $\delta_k^{(p)} \to \mu^{p+1}$ и $\delta_k^{(p+1)} \to \mu^{p+2}$ при $k \to \infty$.

Таким образом, учитывая, что $\mu^{p+2} < \mu^{p+1}$, в зависимости от величин λ_p и λ_{p+1} и начального приближения x_0 либо $\delta_k^{(p+1)} < \delta_k^{(p)}$ для всех $k=0,1,\ldots$, либо $\delta_k^{(p+1)} < \delta_k^{(p)}$ для $k \geqslant k_p > 0$.

То же самое можно утверждать в случае, где A_k определяются по формуле (5).

Наконец, сделаем несколько замечаний.

В [1] доказано, что при $p=0,1$ начиная с любого $x=x_0 \in S$ методы (3), (4) и (3′), (4′) влекут за собой невозрастающую последовательность $\|F(x_k)\|$ $(k=0,1,\ldots)$. Поэтому, если в нашем распоряжении не имеется достаточно хорошего начального приближения x_0, то в начале процесса нахождения очередного приближения к решению x^* целесообразно взять $p = 0, 1$, а потом постепенно увеличивать это значение, так как при $p \to \infty$ операторы $A_k \to [F'(x_k)]^+$ или $[F'(x_k)]^{-1}$.

При линейном уравнении $F(x) = 0$ метод (3′), (5′) идейно близок к методу Ричардсона [6].

Обобщение модифицированного метода Ньютона, т. е.

$$x_{k+1} = x_k - [F'(x_0)]^+ F(x_k) \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

имеющее тоже линейную скорость сходимости, сводится в общем к решению уравнения $[F'(x_0)]^* F(x) = 0$, но зато методы (3), (4) и (3), (5) сводятся к решению уравнения $[F'(x)]^* F(x) = 0$.

Вычислительные схемы при методах (3), (4); (3′), (4′); (3), (5) и (3′), (5′) наглядны и просто реализуемы на ЭВМ, так как они малотребовательны к памяти ЭВМ и для нахождения очередного x_{k+1} не нужно искать A_k в явном виде, а достаточно лишь последовательно применить операторы $[F'(x_k)]^*$ и $F'(x_k)$ (или просто $F'(x_k)$) к элементу $F(x_k)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ваарманн О., О некоторых итерационных методах с последовательной аппроксимацией обратных и псевдообратных операторов, Автореф. канд. дисс., Таллин, 1970.
2. Ваарманн О., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **19**, 265 (1970).
3. Desoer C. A., Whalen B. H., J. Soc. Industr. Appl. Math., **11**, 442 (1963).
4. Kielbasinski A., Studia Math., 24, No 1, 13 (1964).
5. Гавурин М., УМН, 5.3(37), 156 (1950).
6. Вазов В., Форсайт Дж., Разностные методы решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., 1963.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
16/III 1971

O. VAARMANN

LIGIKAUDSETE PSEUDOPÖÖRDOPERAATORITE KASUTAMINE MITTELINEAARSETE VÕRRANDITE LAHENDAMISEL

Olgu A mingi lineaarne tõkestatud operaator ühest Hilberti ruumist H_1 teise H_2, mille väärtuste piirkond on kinnine, ja X_0 mingi alglähend operaatori A pseudopöördoperaatorile A^+. Juhul, kui X_0 rahuldab teatud tingimusi, on tõestatud jada (1) koonduvus pseudopöördoperaatoriks A^+. Võrrandi (2) lahendamiseks on konstrueeritud iteratsioonimeetodid, mis põhinevad pseudopöördoperaatorite aproksimeerimisel, kasutades sealjuures rekurrentset seost (I) ja Tšebõševi polünoome. Tõestatakse vaadeldud iteratsioonimeetodite koonduvus võrrandi (2) lahendiks.

O. VAARMANN

APPLICATION OF THE APPROXIMATION OF THE PSEUDOINVERSES TO THE SOLUTION OF NONLINEAR EQUATIONS

Let A be bounded linear operator with closed range between Hilbert spaces, and X_0 an initial approximation to the pseudoinverse or generalized inverse A^+. Under certain conditions of X_0 the convergence of the sequence (1) to A^+ is proved. For solving (2) certain iterative methods based on approximation of the pseudoinverses in accordance with (I) are proposed. In particular, the Chebyshev acceleration procedure for approximation of the pseudoinverses is used. Some convergence theorems concerning the iterative methods (3) as well as the existence of a solution of $[F'(x)]^* F(x) = 0$ are proved, where $F(x)$ represents a nonlinear differentiable operator of a Hilbert space H_1 into a Hilbert space H_2. In conclusion, some conditions of the general theorem 1 [3, 4] are modified.