EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 20. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1971, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 20
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1971, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1971.4.01

УДК 517.512

Г. КАНГРО

О λ-СОВЕРШЕННОСТИ МЕТОДОВ СУММИРОВАНИЯ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯХ. II

Соответственно заданной последовательности $\lambda=\{\lambda_n\}$ с $0<\lambda_n\uparrow$ на основе результатов I части настоящей статьи [1] вводится понятие о λ-совершенном матричном методе суммирования. Устанавливаются необходимые и достаточные, а также (в некотором смысле более эффективные) достаточные условия для того, чтобы λ-консервативный и λ-обратимый метод $A=(a_{nk})$ с $\sum\limits_k a_{nk}=\text{const}\neq 0$ был λ-совершенным. С помощью этих условий показывается, что важнейшие с точки зрения практики методы суммирования (регулярные методы Чезаро, Эйлера—Кноппа и Рисса) являются λ-совершенными, если они λ-консервативны. При решении прямых задач теории λ-суммируемости возникают затруднения в связи с изучением включения $c_A^\lambda\subset c_B^\mu$, в то время как изучение включения $c_A^\lambda\subset m_B^\mu$ сравнительно проще. Для λ-совершенного метода A устанавливаются необходимые и достаточные условия для того, чтобы из второго включения вытекало первое. Эти условия просты в том смысле, что они не зависят от специальной структуры метода A. В качестве примера рассматриваются множители суммируемости класса (A^λ, B^μ).

§ 3. Необходимые и достаточные условия для λ-совершенности

1. Метод суммирования A называется совершенным (см. [2], с. 40), если последовательности e_ν, e составляют основное множество (т. е. множество, линейная оболочка которого всюду плотна) в поле суммируемости c_A метода A. При изучении λ-суммируемости полезным оказывается следующее обобщение понятия совершенности.

Определение 2. Метод A называется *λ-совершенным*, если множество $E=\{e_\nu, e, e^\lambda\}$ является основным множеством в поле λ-суммируемости c_A^λ метода A.

В определении 2 предполагается, что

$$E\subset c_A^\lambda. \tag{21}$$

Из условий 1° и 3° леммы 3 вытекает, что условие (21) выполнено, если метод A является λ-консервативным. Если $\lambda_n=O(1)$, то λ-совершенность превращается в совершенность.

В дальнейшем допустим, что метод $A=(a_{nk})$ удовлетворяет условию

$$\sum_k a_{nk}=a, \tag{22}$$

где a — отличная от нуля константа. Условию (22) удовлетворяют многие имеющие практическое значение методы суммирования (напр., методы Чезаро, Риса, Вороного—Нёрлунда, Эйлера—Кноппа, Валлэ—Пуссэна, Бернштейна—Рогозинского, Гронуолла, Херлестама, Лотоцкого, Якимовского и др.).

Отметим, что если λ-консервативный метод A удовлетворяет условию (22) и $a_k = 0$, $\alpha \neq 0$, то A является λ-совершенным, если в подполе n_A^λ имеет место слабая сходимость по отрезкам. Действительно, положив

$$x_0 = x - \frac{\eta}{\alpha} e - \frac{\gamma}{\alpha} e^\lambda,$$

где по-прежнему

$$\begin{aligned} \eta &= \lim \eta_n, \qquad \eta_n = \sum_k a_{nk} \xi_k, \\ \gamma &= \lim \gamma_n, \qquad \gamma_n = \lambda_n (\eta_n - \eta), \end{aligned} \tag{23}$$

ввиду формул (22) и (12) находим, что из $x \in c_A^\lambda$ следует $x_0 \in n_A^\lambda$. Тем самым в точке $x_0 = \{\xi_k^0\}$ согласно предположению имеет место слабая сходимость по отрезкам, вследствие чего последовательность

$$\left\{ \sum_{k=0}^{n} \xi_k^0 e_k + \frac{\eta}{\alpha} e + \frac{\gamma}{\alpha} e^\lambda \right\}$$

при $n \to \infty$ слабо сходится к x. Но тогда x принадлежит к замыканию линейной оболочки множества E и, следовательно, E — основное множество в поле c_A^λ.

Например, метод взвешенных средних Риса (R, p_n) с $p_n \geqslant 0$ и $\lim (1/P_n) = 0$ является λ-совершенным, если он λ-консервативен. Действительно, условия (22) и $a_k = 0$ выполнены. При применении следствия 2 к методу (R, p_n) мы видели, что в подполе n_A^λ имеет место слабая сходимость по отрезкам, причем $\alpha_k = 0$. Но поскольку метод (R, p_n) в данном случае λ-корегуляреn (см. пример 1), то $\alpha \neq 0$.

Отметим, что слабая сходимость по отрезкам в подполе n_A^λ имеет место только у немногих методов суммирования. Поэтому важно установить более слабые условия, обеспечивающие λ-совершенность.

2. Следуя Э. Юримяэ [3], будем называть метод $A = (a_{nk})$ методом типа P, если система уравнений

$$a_k t + \sum_n a_{nk} d_n = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

где $t = 0$ при корегулярном [1] A, имеет в пространстве l лишь тривиальное решение $t = d_0 = d_1 = \ldots = 0$. Известно, что обратимый консервативный метод A совершенен тогда и только тогда, когда A — метод типа P (см. [3, 4]). При этом метод A называется обратимым, если уравнение $Ax = y$ имеет единственнсе решение при всех $y \in c$.

Метод A будем называть *λ-обратимым*, если уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение при всех $y \in c^\lambda$. Например, треугольный метод λ-обратим тогда и только тогда, когда он нормален. Если $\lambda_n = O(1)$, то λ-обратимость превращается в обратимость. Если A является λ-обратимым, то метод A^{-1}, преобразующий FK-пространство c^λ в FK-пространство c_A^λ, непрерывен (см. [2], с. 29). Поэтому для любого непрерывного линейного функционала f из c_A^λ имеем

[1] Для корегулярного метода A понятие метода типа P совпадает с понятием метода типа M, введенным Дж. Д. Хиллом [5].

$$f(x)=f(A^{-1}y)=g(y)\quad (y=Ax),$$

где $g=fA^{-1}$ — непрерывный линейный функционал из пространства c^λ. Тем самым непрерывный линейный функционал f из c^λ_A при λ-обратимом A в силу леммы 2 имеет следующий общий вид [2]:

$$f(x)=d\eta+t\gamma+\sum_n d_n\gamma_n,\qquad \sum_n |d_n|<\infty, \tag{24}$$

где η, γ, γ_n определяются соотношениями (23).

Т е о р е м а 2. *Если $\lambda_n\neq O(1)$, то λ-обратимый и λ-консервативный метод A, удовлетворяющий условию* (22), *является λ-совершенным тогда и только тогда, когда метод $\mathfrak{A}=(\alpha_{nk})$, определяемый формулой* (11), *является методом типа P.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $E=\{e_k,\ e,\ e^\lambda\}$ является основным в поле $\overset{\lambda}{c}_A$ тогда и только тогда, когда из соотношений

$$f(e_k)=0,\quad f(e)=0,\quad f(e^\lambda)=0 \tag{25}$$

вытекает $f(x)=0$ при всех $x\in c^\lambda_A$, где f определяется формулой (24). Положив в (24) вместо x поочередно $A^{-1}e_k$, $A^{-1}e$ и $A^{-1}e^\lambda$, заключаем, что условие $f(x)=0$ при всех $x\in c^\lambda_A$ равносильно условиям

$$d=t=d_n=0.$$

Остается выяснить, когда последние условия вытекают из (25).

Ввиду (22) условие $f(e)=0$ дает $ad=0$, откуда в силу $a\neq 0$ следует $d=0$. Поэтому условия $f(e_k)=0$, $f(e^\lambda)=0$ ввиду предположения $\lambda_n\neq O(1)$ приобретают вид

$$\alpha_k t+\sum_n \alpha_{nk}d_n=0, \tag{26}$$

$$\alpha t+\sum_n\sum_k \alpha_{nk}d_n=0, \tag{27}$$

где $\Sigma|d_n|<\infty$. Поскольку метод A является λ-консервативным, то в силу леммы 3 метод $\mathfrak{A}$ консервативен и, следовательно,

$$\sum_k|\alpha_{nk}|=O(1),\qquad \sum_k|\alpha_k|<\infty.$$

Поэтому, просуммировав равенства (26) по $k=0,\ 1,\ \ldots$ и вычитая результат из равенства (27), находим

$$\varrho(\mathfrak{A})t=0. \tag{28}$$

Аналогично из условий (26) и (28) вытекает (27). Тем самым условия (25) равносильны условиям $d=0$, (26) и (28). Согласно понятию метода типа P множество E основное в поле c^λ_A тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}$ — метод типа P. Теорема доказана.

Таким образом, λ-обратимый и λ-консервативный метод A, удовлетворяющий условию (22), λ-совершенен при $\lambda_n\neq O(1)$ тогда и только тогда, когда система уравнений (26), где $t=0$ при λ-корегулярном A, имеет в пространстве l лишь тривиальное решение $t=d_0=d_1=$ $=\ldots=0$.

П р и м е р 4. Если $A=(R,p_n)$ с $p_n\neq 0$ является λ-консервативным методом Риса, то условие (26) принимает вид

[2] Ср. формулу (9).

$$\delta' t + \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n (P_n^{-1} - \delta) d_n - \delta \sum_{n=0}^{k-1} \lambda_n d_n = 0,$$

где $\delta = \lim P_n^{-1}$, $\delta' = \lim \lambda_n (P_n^{-1} - \delta)$. Поскольку выписанное условие справедливо при всех $k = 0, 1, \ldots$, то, вычисляя разность по k, находим

$$\lambda_k P_k^{-1} d_k = 0,$$

откуда $d_k = 0$ и, следовательно, $t = 0$ при $\delta' \neq 0$. Согласно теореме 2 отсюда вытекает, что *λ-консервативный*[3] ($\lambda_n \neq O(1)$) *метод Риса* (R, p_n) *с* $p_n \neq 0$ *является λ-совершенным тогда и только тогда, когда он λ-корегулярен, или λ-конулевой с* $\delta' \neq 0$.

Пример 5. Если $A = (E, q)$ с $q > 0$ является λ-консервативным методом Эйлера—Кноппа, то он λ-корегулярен согласно примеру 3. Поэтому условие (26) принимает вид

$$\sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n \binom{n}{k} p^n d_n = 0, \tag{29}$$

где $p = q/(q+1)$. Левую часть равенства (29) можно рассматривать как умноженную на множитель $p^k/k!$ производную порядка k от степенного ряда

$$\varphi(z) = \sum_n \lambda_n d_n z^n, \qquad \sum |d_n| < \infty \tag{30}$$

в точке $z = p$. Покажем, что радиус сходимости R ряда (30) больше p. Действительно, ввиду λ-консервативности метода (E, q) из (18) имеем

$$\lambda_n p^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{q^k \lambda_k} = O(1),$$

откуда $\lambda_n = O(p^{-n})$ и, следовательно,

$$\lambda_n p^n \left(1 + \frac{p}{q}\right)^n = \lambda_n p^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{p}{q}\right)^k = O(1).$$

Так как $\Sigma |d_n| < \infty$, то $R > p$.

В силу равенства (29) имеем $\varphi^{(k)}(p) = 0$ для всех $k = 0, 1, \ldots$ и, стало быть, $\varphi(z) \equiv 0$, т. е. $\lambda_n d_n = 0$, откуда $d_n = 0$. Согласно теореме 2 отсюда вытекает, что *λ-консервативный*[4] ($\lambda_n \neq O(1)$) *метод Эйлера—Кноппа* (E, q) с $q > 0$ *является λ-совершенным.*

§ 4. Достаточные условия для λ-совершенности

1. Поскольку в поле c_A^λ имеет место покоординатная сходимость, то элементы ξ_k последовательности $x = \{\xi_k\}$ представляют собой непрерывные линейные функционалы из c_A^λ. Поэтому для λ-обратимого метода $A = (a_{nk})$ согласно формуле (24) имеем

$$\xi_n = d_n \eta + t_n \gamma + \sum_k d_{nk} \gamma_k, \qquad \sum_k |d_{nk}| < \infty,$$

---

[3] Вторая часть утверждения несправедлива при $\lambda_n = O(1)$, поскольку тогда $\delta' = 0$, а метод (R, p_n) с $p_n \neq 0$, как легко показать, всегда совершенен (ср. [5]).

[4] Утверждение справедливо и при $\lambda_n = O(1)$ (см. [7]).

где η, γ, γ_k определяются соотношениями (23). Если $y = e_\nu$, то из последнего равенства находим

$$\xi_n = d_{n\nu}\lambda_\nu.$$

Следовательно, при $\xi_k = d_{k\nu}\lambda_\nu$, $\eta_n = \delta_{n\nu}$ уравнение $Ax = y$ превращается в тождество

$$\sum_k a_{nk} d_{k\nu} \lambda_\nu = \delta_{n\nu}, \tag{31}$$

откуда следует, что матрица $(d_{nk}\lambda_k)$ является правой обратной к матрице A. В терминах d_{nk} можно сформулировать достаточное условие того, чтобы $\mathfrak{A}$ был методом типа P.

Теорема 3. *Если $\lambda_n \neq O(1)$ и λ-консервативный метод $A = (a_{nk})$ имеет правую обратную матрицу $(d_{nk}\lambda_k)$, то метод $\mathfrak{A} = (\alpha_{nk})$ является методом типа P, если*

1° *метод $\mathfrak{A}$ корегулярен и $\lambda_n d_{nk} = O_k(1)$*

или

2° *метод $\mathfrak{A}$ конулевой,* $\exists \lim\limits_n \lambda_n d_{nk}$ и $\alpha_k \neq 0$ *при некотором k.*

Доказательство. Покажем, что при условии $\lambda_n d_{nk} = O_k(1)$ матрица $(\lambda_n d_{nk})$ представляет собой правую обратную к матрице $\mathfrak{A}$. Действительно, ввиду λ-консервативности метода A метод $\mathfrak{A}$ согласно лемме 3 консервативен, вследствие чего

$$\sum_k \alpha_{nk} \lambda_k d_{k\nu} = O_\nu(1).$$

Ввиду формулы (11) и условия $\lambda_n \neq O(1)$ отсюда следует

$$\lim_n \sum_k (a_{nk} - a_k) d_{k\nu} = 0$$

и в силу формулы (31)

$$\sum_k a_k d_{k\nu} = 0.$$

Тем самым на основе формулы (31) получаем

$$\sum_k \alpha_{nk} \lambda_k d_{k\nu} = \lambda_n \sum_k (a_{nk} - a_k) d_{k\nu} = \lambda_n \sum_k a_{nk} d_{k\nu} = \delta_{n\nu}.$$

Доказательство теоремы теперь завершается следующей леммой.

Лемма 5. *Консервативный метод $\mathfrak{A} = (\alpha_{nk})$ с правой обратной матрицей (α'_{nk}) является методом типа P, если*

1° *метод $\mathfrak{A}$ корегулярен и $\alpha'_{nk} = O_k(1)$*

или

2° *метод $\mathfrak{A}$ конулевой,* $\exists \lim\limits_n \alpha'_{nk}$ *и* $\alpha_k \neq 0$ *при некотором k.*

Доказательство. Из равенства (26) получаем

$$\sum_k \alpha_k \alpha'_{k\nu} t + \sum_k \alpha'_{k\nu} \sum_n \alpha_{nk} d_n = 0,$$

откуда

$$\sum_k \alpha_k \alpha'_{k\nu} t + d_\nu = 0, \tag{32}$$

ибо ввиду консервативности метода $\mathfrak{A}$ и предположений $\alpha'_{k\nu} = O_\nu(1)$, $\Sigma |d_n| < \infty$ допустима замена порядка суммирования.

Если $\mathfrak{A}$ корегулярен, то $t = 0$ и из (32) вытекает $d_\nu = 0$. Если же $\mathfrak{A}$ конулевой, то в силу консервативности метода $\mathfrak{A}$ согласно теореме Кожима—Шура (см., напр., [6], с. 12—13) находим

$$0 = \lim_n \delta_{n\nu} = \lim_n \sum_k a_{nk}\alpha'_{k\nu} = \varrho(\mathfrak{A}) \lim_k \alpha'_{k\nu} + \sum_k a_k\alpha'_{k\nu} = \sum_k a_k\alpha'_{k\nu}.$$

Тем самым из (32) следует $d_\nu = 0$, а из (26) — $a_k t = 0$. Так как при некотором k имеем $a_k \neq 0$, то $t = 0$. Этим лемма доказана.

Часть 1° леммы 5 по существу доказал С. Мазур [7].

Пример 6. Метод Чезаро $A = (C, \alpha)$ с $\alpha > 0$ является λ-обратимым, причем для элементов обратной матрицы A^{-1} имеем

$$d_{nk}\lambda_k = A_k^\alpha A_{n-k}^{-\alpha-1}.$$

Если метод (C, α) является λ-консервативным, то $\lambda_n = o(n+1)$ (см. [8]) и при $n \to \infty$ имеем

$$\lambda_n d_{nk} = \frac{1}{\lambda_k} A_k^\alpha \lambda_n A_{n-k}^{-\alpha-1} = o(1).$$

Кроме того, λ-консервативный метод (C, α) согласно примеру 2 λ-корегулярен. Тем самым из теорем 2 и 3 вытекает, что *λ-консервативный*[5] *($\lambda_n \neq O(1)$) метод Чезаро (C, α) с $\alpha > 0$ является λ-совершенным.*

2. Рассмотрим метод Риса $(R_\varkappa, p_n)$ целочисленного порядка $\varkappa > 0$, определяемый в виде преобразования последовательности в последовательность нижней треугольной матрицей с элементами

$$a_{nk} = \Delta_k \gamma_{nk}^\varkappa,$$

где

$$\gamma_{nk}^\varkappa = \left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_n}\right)\left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_{n+1}}\right)\dots\left(1 - \frac{P_{k-1}}{P_{n+\varkappa-1}}\right), \qquad P_n = \sum_{k=0}^n p_k \neq 0.$$

Для изучения λ-совершенности метода $(R_\varkappa, p_n)$ нам понадобится

Лемма 6. *Если метод Риса $(R_\varkappa, p_n)$ с $p_n \geqslant 0$ является λ-консервативным, то он λ-корегулярен, если $\delta = \lim_n P_n^{-1} = 0$, и λ-конулевой, если $\delta \neq 0$ и существует предел*

$$\delta' = \lim_n \lambda_n (P_n^{-1} + P_{n+1}^{-1} + \dots + P_{n+\varkappa-1}^{-1} - \varkappa\delta).$$

Доказательство. Рассмотрим отдельно случаи $\delta = 0$ и $\delta \neq 0$.

1) Если $\delta = 0$, то $a_k = 0$. Покажем, что из λ-консервативности метода $(R_\varkappa, p_n)$ вытекает[6] $\lambda_n = o(P_n)$. Действительно, поскольку

$$a_{nk} = \sum_{\nu=1}^{\varkappa} (-1)^{\nu-1} c_{n\nu}(P_k^\nu - P_{k-1}^\nu), \tag{33}$$

где

$$c_{n\nu} = (P_n P_{n+1} \dots P_{n+\nu-1})^{-1} + \dots + (P_{n+\varkappa-\nu} P_{n+\varkappa-\nu+1} \dots P_{n+\varkappa-1})^{-1},$$

то из оценки $\lambda_n a_{n0} = O(1)$, вытекающей из λ-консервативности метода $(R_\varkappa, p_n)$, следует $\lambda_n = O(P_n)$. Тем самым $\Sigma\, p_n/\lambda_n = \infty$. В силу формулы (11) с помощью преобразования Абеля получаем

---

[5] Утверждение справедливо и при $\lambda_n = O(1)$ (см. [7]).

[6] Из доказательства следует, что условие $\lambda_n = o(P_n)$ имеет место и тогда, когда метод (R, p_n) сохраняет λ-ограниченность.

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} = \frac{\lambda_n}{P_n} \zeta_n, \tag{34}$$

где

$$\zeta_n = \sum_{k=0}^{n} b_{nk} \xi_k, \qquad b_{nk} = P_n \Delta_k \frac{a_{nk}}{p_k}, \qquad \xi_k = \sum_{\nu=0}^{k} \frac{p_\nu}{\lambda_\nu}.$$

Применяя формулу разности произведения, находим

$$b_{nk} = P_n \Delta_k (P_n^{-1} \overset{\varkappa-1}{\gamma}_{n+1,k} + P_{n+1}^{-1} \overset{\varkappa-2}{\gamma}_{n+2,k} \overset{1}{\gamma}_{n,k+1} + \ldots + P_{n+\varkappa-1}^{-1} \overset{\varkappa-1}{\gamma}_{n,k+1}) =$$

$$= P_n [P_n^{-1} \overset{\varkappa-1}{a}_{n+1,k} + P_{n+1}^{-1} (\overset{\varkappa-2}{a}_{n+2,k} \overset{1}{\gamma}_{n,k+1} + \overset{\varkappa-2}{\gamma}_{n+2,k+1} \overset{1}{a}_{n,k+1}) + \ldots +$$

$$+ P_{n+\varkappa-1}^{-1} \overset{\varkappa-1}{a}_{n,k+1}],$$

где

$$\overset{\nu}{a}_{nk} = \Delta_k \overset{\nu}{\gamma}_{nk} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa - 1).$$

Отсюда заключаем, что

$$b_{nk} \geqslant 0, \quad \lim_n b_{nk} = 0, \quad \sum_{k=0}^{n} b_{nk} = P_n \frac{a_{n0}}{p_0} \geqslant 1$$

и, стало быть, $\zeta_n \to \infty$. Ввиду λ-консервативности метода $(R_\varkappa, p_n)$ из (34) следует $\lambda_n = o(P_n)$.

Из формулы (33) теперь вытекает, что $\alpha_k = 0$. Тем самым метод $(R_\varkappa, p_n)$ в силу леммы 4 является λ-корегулярным.

2) Если $\delta \neq 0$, то из (33) на основе формулы (11) получаем

$$\alpha_{nk} = \frac{1}{\lambda_k} \sum_{\nu=1}^{\varkappa} (-1)^{\nu-1} \lambda_n (c_{n\nu} - c_\nu) (\overset{\nu}{P}_k - \overset{\nu}{P}_{k-1}),$$

где

$$c_\nu = \binom{\varkappa}{\nu} \delta^\nu.$$

Ввиду существования предела δ' после небольших выкладок находим

$$\lim_n \lambda_n (c_{n\nu} - c_\nu) = \binom{\varkappa-1}{\nu-1} \delta^{\nu-1} \delta' \quad (\nu = 1, 2, \ldots, \varkappa)$$

и, следовательно,

$$\alpha = \lim_n \sum_k \alpha_{nk} = \lim_n \left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} - \lambda_n \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k} \right) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{\varkappa} (-1)^{\nu-1} \binom{\varkappa-1}{\nu-1} \delta^{\nu-1} \delta' \sum_k \frac{\overset{\nu}{P}_k - \overset{\nu}{P}_{k-1}}{\lambda_k} =$$

$$= \sum_k a_k,$$

чем показано, что при $\delta \neq 0$ метод $(R_\varkappa, p_n)$ является λ-конулевым. Лемма доказана.

Пример 7. Метод Риса $A = (R_\varkappa, p_n)$ с $p_n > 0$ является λ-обратимым, причем для элементов обратной матрицы A^{-1} имеем $a'_{nk} = 0$ при $n > k + \varkappa$ (см. [9], с. 94 и [6], с. 50), откуда

$$\lim_n \lambda_n d_{nk} = \frac{1}{\lambda_k} \lim_n \lambda_n a'_{nk} = 0.$$

Согласно лемме 6 и теоремам 2 и 3 *λ-консервативный*[7] $(\lambda_n \neq O(1))$ *метод Риса $(R_\varkappa, p_n)$ с $p_n > 0$ является λ-совершенным, если $\delta = 0$ или* $\delta \neq 0$ и $\delta' \neq 0$ (в последнем случае $\alpha_0 = p_0 \lambda_0^{-1} \delta' (1 - \delta p_0)^{\varkappa - 1} \neq 0$).

§ 5. Применение понятия λ-совершенности

1. Следующая теорема служит основой для многих приложений понятия λ-совершенности.

Теорема 4. *Для λ-совершенного метода A и произвольного матричного метода B импликация*

$$c_A^\lambda \subset m_B^\mu \Rightarrow c_A^\lambda \subset c_B^\mu \tag{35}$$

справедлива тогда и только тогда, когда

$$Be_\nu,\ Be,\ Be^\lambda \in c^\mu. \tag{36}$$

Доказательство. В силу λ-совершенности метода A имеем e_ν, e, $e^\lambda \in c_A^\lambda$. Поэтому из (35) вытекает (36), т. е. условие (36) необходимо. Для доказательства достаточности условия (36) рассмотрим функционалы f_n из пространства c_A^λ с

$$f_n(x) = \mu_n (\zeta_n - \zeta),$$

где

$$\zeta_n = \sum_k b_{nk} \xi_k, \quad \zeta = \lim_n \zeta_n, \quad B = (b_{nk}), \quad x = \{\xi_k\}.$$

Так как в пространстве c_A^λ имеет место покоординатная сходимость, то ζ_n, а также f_n есть непрерывные линейные функционалы из пространства c_A^λ. Ввиду включения в левой части (35) из $x \in c_A^\lambda$ следует $x \in m_B^\mu$, вследствие чего последовательность $\{f_n\}$ ограничена в каждой точке пространства c_A^λ. Согласно принципу равномерной ограниченности последовательность $\{f_n\}$ равностепенно непрерывна. В силу условия (36) последовательность $\{f_n\}$ сходится на множестве $\{e_\nu, e, e^\lambda\}$, являющемся основным в пространстве c_A^λ ввиду λ-совершенности метода A. По теореме Банаха—Штейнхауса последовательность $\{f_n\}$ сходится на всем пространстве c_A^λ. Другими словами, $x \in c_B^\mu$ и, следовательно, $c_A^\lambda \subset c_B^\mu$. Теорема доказана.

Примечание 1. При $\mu_n = O(1)$ импликация (35) тривиальна, ибо в этом случае $m^\mu = c^\mu = c$. Аналогично доказательству теоремы 4

---

[7] Из лемм 5 и 6 вытекает, что утверждение справедливо и при $\lambda_n = O(1)$ (см. первый абзац § 3 п. 2).

можно показать, что утверждение теоремы 4 остается справедливым, если при $\mu_n = O(1)$ считать $m^\mu = m$.

Примечание 2. Если A — нормальный и B — любой треугольный методы суммирования, то включение $c^\lambda_A \subset m^\mu_B$ (соответственно $m^\lambda_A \subset m^\mu_B$) справедливо тогда и только тогда, когда $C(c^\lambda) \subset m^\mu$ (соответственно $C(m^\lambda) \subset m^\mu$), где $C = BA^{-1}$. Методом, которым были установлены необходимые и достаточные условия для включения $A(c^\lambda) \subset c^\mu$ (см. [10]), нетрудно показать, что для включения $A(c^\lambda) \subset m^\mu$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

1° $\exists \lim\limits_n a_{nk} = a_k$,

2° $Ae \in m^\mu$,

3° $\sum\limits_k \frac{|a_k|}{\lambda_k} < \infty$,

4° $\mu_n \sum\limits_k \frac{|a_{nk} - a_k|}{\lambda_k} = O(1)$,

где $A = (a_{nk})$. Если условия $\lambda_n \neq O(1)$ и $\mu_n = O(1)$ не выполняются одновременно, то 1°—4° совпадают с необходимыми и достаточными условиями для включения $A(m^\lambda) \subset m^\mu$ (см. [8]) и, следовательно,

$$c^\lambda_A \subset m^\mu_B \Leftrightarrow m^\lambda_A \subset m^\mu_B. \tag{37}$$

Нетрудно проверить, что соотношение (37) справедливо и в случае $\lambda_n \neq O(1)$, $\mu_n = O(1)$, если считать $m^\mu = m$ при $\mu = O(1)$. Итак, *в случае нормального метода A и треугольного метода B в теореме* 4 *соотношение* (35) *можно заменить соотношением*

$$m^\lambda_A \subset m^\mu_B \Rightarrow c^\lambda_A \subset c^\mu_B,$$

если при $\mu_n = O(1)$ *считать*[8] $m^\mu = m$.

2. Применим теорему 4 для нахождения множителей суммируемости класса (A^λ, B^μ). При этом предположим, что метод B задан в виде преобразования ряда в последовательность матрицей (β_{nk}).

Теорема 5. *Если метод A является λ-совершенным, а для метода B существуют пределы* $\lim\limits_n \beta_{nk} = \beta_k$, *то* $\varepsilon_n \in (A^\lambda, B^\mu)$ *тогда и только тогда, когда*

1° $\varepsilon_n \in (A^\lambda, B^\mu_O)$,

2° $\exists \lim\limits_n \mu_n(\beta_{nk} - \beta_k)\varepsilon_k$,

3° $\sum\limits_k \varepsilon_k \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{k-1}}\right)$ *является* B^μ-*суммируемым*.

Доказательство. Пусть D — метод суммирования, определенный в виде преобразования ряда в последовательность матрицей $(\beta_{nk}\varepsilon_k)$. Соотношение $\varepsilon_n \in (A^\lambda, B^\mu)$ справедливо тогда и только тогда, когда

$$c^\mu_D \supset c^\lambda_A$$

(ср. [6], с. 148). Согласно теореме 4 последнее соотношение имеет место тогда и только тогда, когда

[8] Следует иметь в виду примечание 1.

$$m_D^{\mu} \supset \overset{\lambda}{c}_A, \tag{38}$$
$$De_\nu,\ De,\ De^\lambda \in c^\mu.$$

Условие (38) — это условие 1° теоремы. Условия De_ν, $De \in c^\mu$ равносильны условию 2° теоремы, а условие $De^\lambda \in c^\mu$ — это условие 3°. Теорема доказана.

Примечание 3. Если A — нормальный и B — треугольный методы суммирования, то из примечания 2 вытекает, что *условие* 1° *теоремы* 5 *можно заменить на условие* $\varepsilon_n \in (\overset{\lambda}{A_O}, \overset{\mu}{B_O})$, *если при* $\mu_n = O(1)$ *считать* $m^\mu = m$.

Если[9] $\lambda_n = O(1)$, то условие 3° теоремы 5 сводится к условию 2° при $k = 0$. Если же $\mu_n = O(1)$, то условие 2° теоремы 5 выполнено. Множители суммируемости класса (A^λ, B^μ) известны лишь в этих частных случаях для методов Чезаро и взвешенных средних Риса [10, 11], в то время как множители суммируемости класса $(\overset{\lambda}{A_O}, \overset{\mu}{B_O})$ установлены в более общих предположениях относительно λ, μ и B (см. [8], теоремы 2 и 3). При этих общих предположениях из результатов статьи [8] с помощью теоремы 5 и примечания 3 без труда получаются множители суммируемости класса (A^λ, B^μ), в частности основные результаты работ [10, 11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Кангро Г., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **20**, 111 (1971).
2. Zeller K., Theorie der Limitierungsverfahren, Berlin, 1958.
3. Юримяэ Э., Уч. зап. Тартуск. ун-та, **253**, 145 (1970).
4. Macphail M. S., Canad. J. Math., **6**, 405 (1954).
5. Hill J. D., Duke Math. J., **3**, 702 (1937).
6. Барон С., Введение в теорию суммируемости рядов, Тарту, 1966.
7. Mazur S., Studia Math., **2**, 40 (1930).
8. Кангро Г., Уч. зап. Тартуск. ун-та. **277**, 136 (1971).
9. Тюрнпу Х., Уч. зап. Тартуск. ун-та, **206**, 90 (1967).
10. Кангро Г., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **18**, 137 (1969).
11. Hyslop J. M., Proc. Edinburgh Math. Soc., **5**, 182 (1938).

Тартуский государственный университет

Поступила в редакцию 10/III 1971

G. KANGRO

SUMMEERIMISMENETLUSTE λ-PERFEKTSUSEST JA SELLE RAKENDUSTEST. II

Maatriksmenetlust A nimetame λ-perfektseks, $(\lambda = \{\lambda_n\},\ 0 < \lambda_n \uparrow)$, kui jadad e_ν, e, e^λ moodustavad summeerimisväljas $\overset{\lambda}{c}_A$ põhihulga [1]. Tuletatakse tarvilikud ja piisavad, samuti ka (teatavas mõttes efektiivsemad) piisavad tingimused selleks, et λ-pööratav ja λ-konservatiivne menetlus $A = (a_{nk})$ oleks λ-perfektne, kui $\sum_k a_{nk} = \text{const} \neq 0$. Nende tingimuste abil näidatakse, et mitmed praktiliselt tähtsamad (regulaarsed Cesàro, Euleri-Knoppi ja Rieszi) menetlused on λ-perfektsed, kui nad on λ-konservatiivsed. Vaadeldakse λ-perfektsuse rakendusi sisalduvuse $\overset{\lambda}{c}_A \subset \overset{\mu}{c}_B$ uurimisel.

[9] Достаточно положить $\lambda_n = 1$.

G. KANGRO

ON λ-PERFECTICITY OF SUMMABILITY METHODS AND ITS APPLICATIONS. II

A matrix summability method A is said to be *λ-perfect* ($\lambda = \{\lambda_n\}$, $0 < \lambda_n \uparrow$) if the set of sequences $\{e_\nu, e, e^\lambda\}$ is fundamental in c_A^λ[1]. Necessary and sufficient and in a certain sense more effective sufficient conditions for the λ-perfecticity of a λ-reversible and λ-conservative method $A = (a_{nk})$ with $\sum\limits_k a_{nk} = \text{const} \neq 0$ have been obtained. By means of these conditions, λ-perfecticity of some practically most important summability methods (regular Cesàro, Euler-Knopp and Riesz methods) has been established in case the methods are λ-conservative. Applications of the λ-perfecticity to the investigation of the inclusion $c_A^\lambda \subset c_B^\mu$ have been considered.