$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{1}{m}(md)^{4^n}.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что для решения нелинейного операторного уравнения, состоящего только из одного уравнения, проще использовать метод (11), чем метод Ньютона—Канторовича

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1}P(x_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{13}$$

В таком случае разделенные разности оператора P являются относительно своих аргументов симметричными (см. [2]). Таким образом, «ценой» трех горнеров[1] мы получаем в случае метода (11) улучшение того же порядка, который при методе (13) требует двух итерационных шагов, т. е. четырех горнеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Островский А. М., Решение уравнений и систем уравнений, М., 1963.
2. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, 13 (1967).
3. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, 146 (1967).
4. Ульм С. Ю., ДАН СССР, 158, 56 (1964).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию 23/VI 1970

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.4.23

М. ЛЕВИН

О НАИЛУЧШИХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

M. LEVIN. PARIMATEST KUBATUURVALEMITEST

M. LEVIN. ÜBER DIE BESTEN KUBATUURFORMELN

Доказанная ниже теорема позволяет для ряда множеств функций нескольких переменных, являющихся естественным обобщением некоторых множеств функций одной переменной, получать наилучшие кубатурные формулы, если известны соответствующие наилучшие квадратурные формулы.

Пусть для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ непрерывная в квадрате $[0,1;\ 0,1]$ функция $g_{im_i}(x, u)$ для любого $x \in [0, 1]$ по u абсолютно-непрерывна на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяет условию

$$g_{im_i}(x, u) = \frac{\partial^{m_i}}{\partial u^{m_i}} \int_0^1 g_{im_i}(x, v)\, g_{im_i}(u, v)\, dv.$$

---

[1] Горнером (единицей Горнера) называется работа, затраченная на вычисление значения функции или одной из ее производных (см. [1]).

Введем следующие обозначения:

$$\varphi_i(u)=\int_0^1 g_{im_i}(x,u)\,dx;$$

V — r-мерный куб $(0\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1,\ \ldots,\ r)$, $\bar{x}=(x_1,\ \ldots,\ x_r)$, $\bar{u}=(u_1,\ \ldots,\ u_r)$, $dv_z=dz_1\ \ldots\ dz_r$; $W_{L_2}(g_{1m_1},\ldots,g_{rm_r})$ — множество функций $f(\bar{x})$, которые в кубе V имеют абсолютно-непрерывные производные

$$f^{(i_1+\ldots+i_r)}_{x_1^{i_1}\ldots x_r^{i_r}}(\bar{x})\quad\begin{pmatrix}i_1\leqslant m_1,\ \ldots,\ i_r\leqslant m_r;\\ i_1+\ldots+i_r<m_1+\ldots+m_r\end{pmatrix}$$

и удовлетворяют условиям

$$f(\bar{x})=\int_V f^{(m_1+\ldots+m_r)}_{u_1^{m_1}\ldots u_r^{m_r}}(\bar{u})\prod_{i=1}^{r} g_{im_i}(x_i,u_i)\,dv_u, \tag{1}$$

$$\left\{\int_V\left[f^{(m_1+\ldots+m_r)}_{u_1^{m_1}\ldots u_r^{m_r}}(\bar{u})\right]^2 dv_u\right\}^{1/2}\leqslant M.$$

Мы будем предполагать, что для рассматриваемого множества выполнено еще следующее условие. Пусть среди чисел $P_{i_1\ldots i_r}$ $(i_k=1,\ \ldots,\ n_k;\ k=1,\ \ldots,\ r)$ есть отличные от нуля, а $(x_{1i_1},\ \ldots,\ x_{ri_r})$ $(i_k=1,\ \ldots,\ n_k;\ k=1,\ \ldots,\ r)$ есть точки из V такие, что не все функции рассматриваемого множества в них равны нулю. Тогда в этом множестве найдется некоторая функция ψ такая, что

$$\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n_1,\ldots,n_r} P_{i_1\ldots i_r}\psi(x_{1i_1},\ \ldots,\ x_{ri_r})\neq 0. \tag{2}$$

Через $W_{L_2}(g_{im_i})$ тогда будем обозначать множество функций $f(x)$, которые на отрезке $[0,1]$ имеют абсолютно-непрерывную производную порядка m_i-1 и удовлетворяют условиям

$$f(x)=\int_0^1 f^{(m_i)}(u)\,g_{im_i}(x,u)\,du,\qquad \{\int_0^1[f^{(m_i)}(u)]^2du\}^{1/2}\leqslant M.$$

Пусть на множестве $W_{L_2}(g_{im_i})$ наилучшая формула [1] вида

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n_i}A_kf(x_k)+r_{n_i}(f)$$

определяется значениями $x_k=x_k^{(i)}$, $A_k=A_k^{(i)}$ $(k=1,\ \ldots,\ n_i)$, при этом для нее $0\leqslant x_k^{(i)}\leqslant 1$ $(k=1,\ \ldots,\ n_i)$ и

$$\sup_{f\in W_{L_2}(g_{im_i})}|r_{n_i}(f)|=M\delta_i,$$

где

$$\delta_i=\{\int_0^1[\varphi_i(u)-\sum_{k=1}^{n_i}A_k^{(i)}g_{im_i}(x_k^{(i)},u)]^2du\}^{1/2}.$$

Теорема. *Среди формул*

$$\int\limits_V f(\bar{x})\,dv_x = \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n_1,\ldots,n_r} A_{i_1\ldots i_r} f(x_{1i_1},\ldots,x_{ri_r}) + R(f) \tag{3}$$

на множестве $W_{L_2}(g_{1m_1},\ldots,g_{rm_r})$ ***наилучшей, т. е. с наименьшим значением величины***

$$R = \sup_{f\in W_{L_2}(g_{1m_1},\ldots,g_{rm_r})} |R(f)|,$$

является формула (3), *у которой*

$$A_{i_1\ldots i_r} = \prod_{k=1}^{r} A_{i_k}^{(k)}, \quad (x_{1i_1},\ldots,x_{ri_r}) = (x_{i_1}^{(1)},\ldots,x_{i_r}^{(r)}) \tag{4}$$

$$(i_k = 1,\ldots,n_k;\ k = 1,\ldots,r).$$

Для этой формулы величина R *равна*

$$M\Big[\prod_{k=1}^{r} \varrho_k^2 - \prod_{k=1}^{r}(\varrho_k^2 - \delta_k^2)\Big]^{1/2}, \tag{5}$$

где

$$\varrho_k^2 = \int\limits_0^1 [\varphi_k(u)]^2\,du \qquad (k = 1,\ldots,r).$$

Доказательство. Подстановкой (1) в (3) получим

$$R(f) = \int\limits_V f^{(m_1+\ldots+m_r)}_{u_1^{m_1}\ldots u_r^{m_r}}(\bar{u})\,K(\bar{u})\,dv_u,$$

где

$$K(\bar{u}) = \prod_{i=1}^{r}\varphi_i(u_i) - \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n_1,\ldots,n_r} A_{i_1\ldots i_r}\prod_{j=1}^{r} g_{jm_j}(x_{ji_j}, u_j).$$

Отсюда

$$|R(f)| \leqslant M\{\int\limits_V [K(\bar{u})]^2\,dv_u\}^{1/2}. \tag{6}$$

Для функции

$$M\int\limits_V K(\bar{u})\prod_{i=1}^{r} g_{im_i}(x_i,u_i)\,dv_u / \{\int\limits_V [K(\bar{u})]^2\,dv_u\}^{1/2}$$

из множества $W_{L_2}(g_{1m_1},\ldots,g_{rm_r})$ неравенство (6) превращается в равенство и поэтому

$$R = M\{\int\limits_V [K(\bar{u})]^2\,dv_u\}^{1/2}. \tag{7}$$

Воспользовавшись условием (2), нетрудно показать, что узлы наилучшей формулы (3) могут быть только среди точек $(x_{1i_1},\ldots,x_{ri_r})$, для которых функции

$$\prod_{k=1}^{r} g_{km_k}(x_{ki_k}, u_k) \qquad \begin{pmatrix} i_k = 1,\ldots,n_k; \\ k = 1,\ldots,r \end{pmatrix}$$

линейно-независимы. В дальнейшем пусть узлы формулы (3) именно такие.

Закрепим в (3) узлы $(x_{1i_1}, \ldots, x_{ri_r}) = (x^{(1)}_{i_1}, \ldots, x^{(r)}_{i_r})$ $(i_k = 1, \ldots, n_k;$ $k = 1, \ldots, r)$. Проведя минимизацию (7) по весам $\{A_{i_1 \ldots i_r}\}$ точно так же, как в [2] это делалось для величины (16) из [2], получим следующий факт: для формулы (3) со значениями весов и узлов (4) величина R имеет значение (5).

Пусть теперь в (3) узлами будут некоторые другие фиксированные точки $(\lambda_{1i_1}, \ldots, \lambda_{ri_r})$. Точно так же, проведя минимизацию (7) по весам, получим

$$A_{i_1 \ldots i_r} = B^{(1)}_{i_1} \ldots B^{(r)}_{i_r} \quad (i_k = 1, \ldots, n_k; \ k = 1, \ldots, r),$$

$$R = M\Big[\prod_{k=1}^{r} \varrho_k^2 - \prod_{k=1}^{r} (\varrho_k^2 - \overline{\delta}_k^2)\Big]^{1/2}, \tag{8}$$

где

$$\overline{\delta}_k^2 = \int_0^1 \Big[\varphi_k(u) - \sum_{j=1}^{n_k} B^{(k)}_j g_{km_k}(\lambda_{kj}, u)\Big]^2 du.$$

Так как $\varrho_k^2 - \delta_k^2$ и $\varrho_k^2 - \overline{\delta}_k^2$ неотрицательны и $\overline{\delta}_k \geqslant \delta_k$, то величина (8) не меньше величины (5). Этим теорема доказана.

Отметим, что как частные случаи из этой теоремы следуют некоторые результаты из [3, 4].

ЛИТЕРАТУРА

1. Никольский С. М., Квадратурные формулы, М., 1958.
2. Левин М., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., 19, 142 (1970).
3. Левин М., Шац Э., Тр. Таллинского политехн. ин-та, сер. А, № 293, 15 (1970).
4. Шац Э., Изв. АН БССР, Физ. Матем., № 3, 68 (1970).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
3/VII 1970