EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.4.22

Х. КОППЕЛЬ

ОБОБЩЕНИЕ НЕКОТОРЫХ МЕТОДОВ А. ОСТРОВСКОГО ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

H. KOPPEL. MONINGATE A. OSTROVSKI MEETODITE ÜLDISTAMINE MITTELINEAARSETE OPERAATORVÕRRANDITE LAHENDAMISEKS

H. KOPPEL. THE GENERALIZATION OF SOME A. OSTROVSKI'S METHODS FOR THE SOLUTION OF NON-LINEAR OPERATOR EQUATIONS

1. А. Островский в своей книге [1], посвященной приближенному решению вещественного уравнения

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

строит формулу

$$x_2 = \frac{x_1 f(x_0)\Delta^* - x_0 f(x_1)}{f(x_0)\Delta^* - f(x_1)}, \tag{2}$$

где

$$\Delta^* = \frac{1}{f'(x_0)} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = [f'(x_0)]^{-1} f(x_1, x_0) \quad (x_1 \neq x_0).$$

Если (2) применять в качестве итерационного метода, то в [1] показано, что (2) имеет скорость сходимости порядка $1 + \sqrt{2}$.

Вместо формулы (2) рассмотрим итерационный метод

$$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_{n-1} - x_n) f(x_n)}{f(x_{n-1})\Delta_n - f(x_n)} \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{3}$$

где

$$\Delta_n = f^{-1}(x_{n-2}, x_{n-1}) f(x_{n-2}, x_n);$$

x_0, x_1, x_2 — три начальных приближения к решению x^* уравнения (1). Преобразуем (3) к следующему виду:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_{n-2}, x_{n-1}) f(x_n)}{f(x_n, x_{n-1}) f(x_{n-2}, x_{n-1}) - f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) f(x_{n-1})},$$

где

$$f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2}) = \frac{f(x_{n-2}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Теперь для приближенного решения нелинейного операторного уравнения

$$P(x) = 0 \tag{4}$$

в банаховом пространстве метод (3) можно легко обобщить

$$x_{n+1} = x_n - P(x_{n-2}, x_{n-1}) G_n P(x_n) \quad (n = 2, 3, \ldots), \tag{5}$$

где

$$G_n = [P(x_n, x_{n-1}) P(x_{n-2}, x_{n-1}) - P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})_1 P(x_{n-1})]^{-1};$$

$P(x', x'')$ — первая разделенная разность оператора P; $P(x', x'', x''')_1$ — вторая разделенная разность оператора P, т. е.

$$P(x', x'', x''')_1 (x' - x'') = P(x''', x') - P(x''', x'').$$

Аналогично определяется

$$P(x', x'', x''')_2 (x' - x'') = P(x', x''') - P(x'', x'''),$$

причем

$$P(x, x, x)_1 + P(x, x, x)_2 = P''(x) \quad (\text{ср. } [^{2,3}]).$$

Докажем теорему, дающую качественную характеристику сходимости метода (5).

Теорема 1. *Пусть*

1° *уравнение* (4) *имеет решение в сфере*

$$S = \max\{\|x - x_0\|; \|x - x_1\|; \|x - x_2\|\} \leqslant d; \tag{6}$$

2° *для каждого* x', x'', x''', x^{IV} *из сферы*

$$S \leqslant (1 + m^2 d^2) d \tag{7}$$

справедливы оценки

а) $\|[P(x', x'') P(x''', x'') - P(x', x'', x''')_1 P(x'')]^{-1}\| \leqslant A$;

б) $\|P^{-1}(x''', x'')\| \leqslant B$;

в) $\|P(x', x'', x''')_1\| \leqslant K_1, \quad \|P(x^{IV}, x''', x'')_2\| \leqslant K_2$;

г) $\|P(x''', x''\| \leqslant M$;

д) $\|P(x', x'', x^{IV})_1 - P(x', x'', x''')_1\| \leqslant L \|x^{IV} - x'''\|$ (ср. [3]);

3° $md < 1$, *где* $m = \sqrt{ABM(K_1 K_2 + LM)}$.

Тогда решение x^* *уравнения* (4) *в сфере* (6) *единственно и последовательность* (5) *сходится к* x^* *со скоростью*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{1}{m} (md)^{t_n} \quad (n = 0, 1, \ldots), \tag{8}$$

где числа t_n *являются обобщенными числами Фибоначчи* [4]

$$(t_0 = t_1 = t_2 = 1; \ t_{n+1} = t_n + t_{n-1} + t_{n-2}; \ n = 2, 3, \ldots).$$

Доказательство. Используем принцип полной индукции. На основании условия 1° оценки (8) справедливы при $n = 0, 1, 2$. Так как по формуле (5)

$$\begin{aligned} x^* - x_{n+1} = {} & P(x_{n-2}, x_{n-1}) G_n \{[P(x_n, x_{n-1}) P(x_{n-2}, x_{n-1}) - \\ & - P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})_1 P(x_{n-1})] P^{-1}(x_{n-2}, x_{n-1}) - P(x_n, x^*)\} (x^* - x_n) = \\ = {} & P(x_{n-2}, x_{n-1}) G_n [P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})_1 P(x^*, x_{n-1}) - P(x_n, x_{n-1}, x^*)_1 \times \\ & \times P(x_{n-2}, x_{n-1})] (x^* - x_{n-1}) P^{-1}(x_{n-2}, x_{n-1}) (x^* - x_n) = \\ = {} & P(x_{n-2}, x_{n-1}) G_n \{P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})_1 P(x^*, x_{n-2}, x_{n-1})_2 (x^* - x_{n-2}) - \\ & - [P(x_n, x_{n-1}, x^*)_1 - P(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})_1] P(x_{n-2}, x_{n-1})\} \times \\ & \times (x^* - x_{n-1}) P^{-1}(x_{n-2}, x_{n-1}) (x^* - x_n), \end{aligned}$$

то

$$\|x^* - x_{n+1}\| \leqslant m^2 \|x^* - x_{n-2}\| \|x^* - x_{n-1}\| \|x^* - x_n\|. \tag{9}$$

По индукции из оценок (9) вытекают оценки (8). Принадлежность элементов x_n сфере (7) следует, например, из неравенства

$$\|x_n - x_0\| \leqslant \|x_n - x^*\| + \|x^* - x_0\| \leqslant (1 + m^2d^2)\,d.$$

Из предыдущего вытекает, что $\lim x_n = x^*$. Если уравнение (4) имело бы в сфере (6) решение $x^{**} \neq x^*$, то мы при помощи аналогичных рассуждений могли бы показать, что $\lim x_n = x^{**}$. Отсюда на основании единственности предельного элемента сходящейся последовательности $\{x_n\}$ следует, что решение x^* в сфере (6) единственно. Теорема доказана.

Метод (5) имеет тот же порядок сходимости (1,84 ...), что и метод, рассмотренный в работе [4]. Но практическое применение метода (5) проще, так как на каждом итерационном шаге ($n = 2, 3, \ldots$) требуется только решение одного линейного операторного уравнения. Из метода (5) легко получить более быстрые сходящиеся последовательности, если в нем взять, например:

1) $x_n = x_{n-2}$ (в этом случае метод (5) имеет тот же порядок сходимости, что и метод (2));

2) $x_n = x_{n-1} = x_{n-2}$, причем метод (5) приобретает тогда вид

$$x_{n+1} = x_n - P'(x_n)\,[P'^2(x_n) - P(x_n, x_n, x_n)_1 P(x_n)\,]^{-1} P(x_n)$$
$$(n = 0, 1, \ldots),$$

имеющий скорость сходимости третьего порядка.

2. Для решения (1) А. Островский рассмотрел в [1] еще метод

$$y_n = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \qquad x_{n+1} = y_n - \frac{f(y_n)\,(y_n - x_n)}{2f(y_n) - f(x_n)} \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{10}$$

и доказал, что он имеет скорость сходимости четвертого порядка.

Приведенная ниже теорема показывает, что обобщение метода (10)

$$y_n = x_n - [P'(x_n)\,]^{-1} P(x_n),$$
$$x_{n+1} = y_n - [P(y_n, x_n) + P(x_n, y_n) - P'(x_n)\,]^{-1} P(y_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots) \tag{11}$$

для решения уравнения (4) имеет тоже скорость сходимости четвертого порядка.

Теорема 2. *Пусть*

1° *уравнение* (4) *имеет решение в сфере*

$$\|x - x_0\| \leqslant d; \tag{12}$$

2° *для каждого* x', x'', x''' *из сферы*

$$\|x - x_0\| \leqslant (1 + \alpha)\,d$$

справедливы оценки

а) $\|[P'(x')\,]^{-1}\| \leqslant B$;

б) $\|[P(x', x'') + P(x'', x') - P'(x')\,]^{-1}\| \leqslant A$;

в) $\|P(x', x'', x')_2\| \leqslant K$;

г) $\|P(x', x'', x')_2 - P(x', x''', x'')_2\| \leqslant L_1\|x' - x''\| + L_2\|x'' - x'''\|$,

причем $\alpha = \max\{m^3d^3;\ BKd\}$;

3° $md < 1$, *где* $m = \sqrt[3]{ABK\{L_1 + BK[\,(L_1 + L_2)\,d + K]\}}$.

Тогда решение x^* *уравнения* (4) *в сфере* (12) *единственно и последовательность* (11) *сходится к* x^* *со скоростью*

$$\|x^* - x_n\| \leqslant \frac{1}{m}(md)^{4^n}.$$

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

Отметим, что для решения нелинейного операторного уравнения, состоящего только из одного уравнения, проще использовать метод (11), чем метод Ньютона—Канторовича

$$x_{n+1} = x_n - [P'(x_n)]^{-1}P(x_n) \qquad (n = 0, 1, \ldots). \tag{13}$$

В таком случае разделенные разности оператора P являются относительно своих аргументов симметричными (см. [2]). Таким образом, «ценой» трех горнеров[1] мы получаем в случае метода (11) улучшение того же порядка, который при методе (13) требует двух итерационных шагов, т. е. четырех горнеров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Островский А. М., Решение уравнений и систем уравнений, М., 1963.
2. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, 13 (1967).
3. Ульм С., Изв. АН ЭССР, Физ. Матем., **16**, 146 (1967).
4. Ульм С. Ю., ДАН СССР, 158, 56 (1964).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
23/VI 1970

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 4

М. ЛЕВИН

О НАИЛУЧШИХ КУБАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

M. LEVIN. PARIMATEST KUBATUURVALEMITEST

M. LEVIN. ÜBER DIE BESTEN KUBATUURFORMELN

Доказанная ниже теорема позволяет для ряда множеств функций нескольких переменных, являющихся естественным обобщением некоторых множеств функций одной переменной, получать наилучшие кубатурные формулы, если известны соответствующие наилучшие квадратурные формулы.

Пусть для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ непрерывная в квадрате $[0,1; 0,1]$ функция $g_{im_i}(x, u)$ для любого $x \in [0,1]$ по u абсолютно-непрерывна на отрезке $[0,1]$ и удовлетворяет условию

$$g_{im_i}(x, u) = \frac{\partial^{m_i}}{\partial u^{m_i}} \int_0^1 g_{im_i}(x, v)\, g_{im_i}(u, v)\, dv.$$

---

[1] Горнером (единицей Горнера) называется работа, затраченная на вычисление значения функции или одной из ее производных (см. [1]).