is due to phase modulation of a v. c. o. by the pulsations at the output of a phase detector. This spurious modulation and response time depend in a contradictory way on the parameters of the filter (R_1C_1, R_2C_2), and suitable compromise between them is adjusted according to the user's requirements. Such a four-element filter is suitable for d. c. amplifier with high output impedance; if this impedance is low, R_2C_2 is omitted. A full-wave phase detector should be used rather than a half-wave one, because the former has less spurious modulation and faster response.

We used a voltage-controlled astable multivibrator as v. c. o. giving continuous frequency variations over a range of one decade. This range can be extended even more by the use of a proper voltage-to-frequency converter. Static phase error is kept in predetermined limits by the d. c. amplifier with a sufficient gain, G.

A multiplier having continuous frequency ranges 5—50 Hz, 10—100 Hz, etc. up to 2 kHz — 20 kHz has been constructed. While acting as a frequency quintupler at 500 Hz/2.5 kHz, it has response time 50 msec for certain filter settings. For the same settings, the rejection ratio for spurious frequencies is at least —57 db, while fundamental frequency is —85 db down at the output.

REFERENCES

1. Völz H., Nachrichtentechnik, **15**, 125 (1965).
2. Winters P. N., Wescon Tech. Papers, Pt. 3, paper 12/3 (1968).
3. Archbold E., J. Sci. Instrum., **39**, 107 (1962).

Academy of Sciences of the Estonian SSR, Institute of Cybernetics

Received May 26, 1970

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÕIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.4.21

Р. ЮРГЕНСОН

ОБ ОЦЕНКЕ ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА СЕТОК ПРИ РЕШЕНИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

R. JÜRGENSON. VÕRKUDE MEETODI VEAHINNANGUST MITTELINEAARSETE ELLIPTILIST TÜÜPI DIFERENTSIAALVÕRRANDITE LAHENDAMISEL

R. JÜRGENSON. ON THE ERROR ESTIMATION OF THE DIFFERENCE METHOD IN SOLVING NONLINEAR ELLIPTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS

В известных работах по основным теоретическим вопросам разностного метода (применительно к эллиптическим уравнениям второго порядка) — оценка погрешности, вопросы сходимости итерационного процесса решения конечно-разностной системы — как правило, ограничиваются уравнением, где смешанные производные отсутствуют (см., напр., [1-3]). В настоящей заметке даются оценки погрешности метода сеток при наличии в уравнении смешанных производных. При этом, смешанные производные аппроксимируются такими разностными выражениями, что к получаемой конечно-разностной системе применим известный принцип максимума (см. [2], гл. II, § 4).

Рассмотрим в конечной области G n-мерного эвклидова пространства эллиптическое дифференциальное уравнение

$$Lu \equiv \sum_{s,t=1}^{n} a_{st}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_t} + \sum_{s=1}^{n} b_s(x) \frac{\partial u}{dx_s} + c(x) u = f(x, u) \tag{1}$$

с краевым условием

$$u(x)\big|_{\Gamma} = \varphi(x), \tag{2}$$

где $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и Γ — граница области G.

Для отыскания приближенного решения задачи $\{(1), (2)\}$ покрываем область $G + \Gamma$ прямоугольной сеткой; шаг сетки в направлении x_i обозначим через h_i. Точки сетки, для который все $2n$ соседних точек принадлежат области $G + \Gamma$, назовем внутренними точками, все остальные точки сетки из $G + \Gamma$ — граничными точками. Совокупности этих точек обозначим через G_h и Γ_h соответственно. Для значений решения задачи $\{(1), (2)\}$ используем обозначения $u = u(x)$, $u^{(i\pm1)} = u(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i \pm h_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $u^{(i\pm1, j\pm1)} = u(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i \pm h_i, x_{i+1}, \ldots, x_{j-i}, x_j \pm h_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, а для приближенных значений — обозначения U, $U^{(i\pm1)}$, $U^{(i\pm1, j\pm1)}$. В заметке используются еще следующие обозначения:

$$\max_G \left| \frac{\partial^{i+j} u(x)}{\partial x_s^i \partial x_t^j} \right| \leqslant M_{ij}^{st}, \qquad \max_G |a_{st}(x)| \leqslant A_{st},$$

$$\max_G |b_s(x)| \leqslant B_s, \quad \min_G c(x) \geqslant C, \quad \|u\| = \max_{G_h+\Gamma_h} |u(x)|.$$

Предположим, что

1° краевая задача $\{(1), (2)\}$ имеет в $G + \Gamma$ достаточно гладкое решение $u(x)$;

2° коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям:

$$a_{ss}(x) > 0 \quad (s = 1, 2, \ldots, n), \quad a_{st}(x) \leqslant 0 \quad (s, t = 1, 2, \ldots, n;\ s \neq t),$$
$$c(x) \leqslant 0 \quad (x \in G);$$

3° $h_s |b_s(x)| \leqslant 2a_{ss}(x) + h_s \sum\limits_{\substack{t=1 \\ (s\neq t)}}^{n} \dfrac{a_{st}(x)}{h_t} \quad (s = 1, 2, \ldots, n;\ x \in G)$;

4° $\omega = \min\limits_{G_h} \left[\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_{kk}(x)}{p_k^2} - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{|b_k(x)|}{p_k} - \dfrac{c(x)}{2} \right] > 0,$

где числа p_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ являются полуосями n-мерного эллипсоида с центром в точке $(x_{10}, x_{20}, \ldots, x_{n0})$, содержащего внутри себя все точки из $G_h + \Gamma_h$.

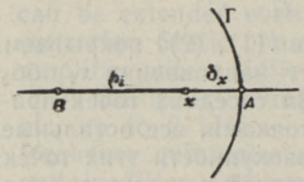
Уравнение (1) заменяем в области G_h следующей системой (при этом учитываем, что $u^{(s+1, s-1)} = u^{(s-1, s+1)} = u$):

$$L_h u \equiv \sum_{s,t=1}^{n} a_{st}(x) \frac{u^{(s+1)} + u^{(s-1)} + u^{(t+1)} + u^{(t-1)} - 2u - u^{(s+1, t-1)} - u^{(s-1, t+1)}}{2h_s h_t} +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} b_s(x) \frac{u^{(s+1)} - u^{(s-1)}}{2h_s} + c(x) u = f(x, u) + R(x) \quad (x \in G_h), \tag{3}$$

где, как нетрудно доказать,

$$|R(x)| \leqslant \sum_{s=1}^{n} \frac{h_s^2}{12} A_{ss} M_{40}^{st} + \sum_{\substack{s,t=1 \\ (s \neq t)}}^{n} A_{st} \left[\frac{1}{6} \frac{h_s^3}{h_t} M_{40}^{st} + \frac{h_s^2}{3} M_{30}^{st} + \frac{h_s h_t}{4} M_{22}^{st} \right] +$$

$$+ \sum_{s=1}^{n} \frac{h_s^2}{6} B_s M_{30}^{st} = R.$$



Рассмотрим в Γ_h граничное условие (2). При его аппроксимации используем аналогично [3] линейную интерполяцию по Коллацу (см. [2], гл. IV, § 2) в направлении x_i (где i выбираем исходя из условия $0 < \delta_x \leqslant h_i$)

$$l_h u \equiv u(x) - \frac{\delta_x}{h_i + \delta_x} u(B) = \frac{h_i}{h_i + \delta_x} \varphi(A) + r_i(x) \quad (x \in \Gamma_h), \tag{4}$$

где $|r_i(x)| \leqslant \frac{3}{2} h_i^2 M_{20}^{ij} \leqslant r$.

Отбрасывая в уравнениях (3) и (4) члены $R(x)$ и $r_i(x)$, получим сеточную систему

$$L_h U = f(x, U) \quad (x \in G_h), \quad l_h(U) = \frac{h_i}{\delta_x + h_i} \varphi(A) \quad (x \in \Gamma_h). \tag{5}$$

Выпишем систему относительно погрешности $\varepsilon(x) = u(x) - U(x)$:

$$L_h \varepsilon = f(x, u) - f(x, U) + R(x) \quad (x \in G_h), \quad l_h \varepsilon = r_i(x) \quad (x \in \Gamma_h). \tag{6}$$

Для оценки погрешности $\varepsilon(x)$ найдем предварительно оценки для решений линейной системы

$$L_h u = V(x) \quad (x \in G_h), \quad l_h u = v(x) \quad (x \in \Gamma_h), \tag{7}$$

где $V(x)$ и $v(x)$ — произвольные функции от x.

Пусть $|V(x)| \leqslant V$ и $|v(x)| \leqslant v$. Согласно принципу максимума, предположения которого в силу 2° и 3° выполнены, система (7) имеет единственное решение $u(x)$, причем любое решение $\varrho(x) \geqslant 0$ системы

$$-L_h \varrho(x) \geqslant V \quad (x \in G_h), \quad l_h \varrho(x) \geqslant v \quad (x \in \Gamma_h) \tag{8}$$

является оценкой для $|u(x)|$.

Разыскивая решение $\varrho(x)$ в виде $\varrho(x) = \alpha + \beta W(x)$, где

$$W(x) = 1 - \sum_{h=1}^{n} \frac{(x_k - x_{k0})^2}{p_h^2},$$

и используя при нахождении α и β методы, аналогичные методам [1,3] и [2] (см. гл. IV, § 2), получим оценки

$$|u(x)| \leqslant 2v + \frac{V(W(x) + 1)}{2\omega} \leqslant 2v + \frac{V}{\omega} \quad (x \in G_h + \Gamma_h). \tag{9}$$

Предположим дополнительно, что

5° задача (5) имеет решение $U(x)$;

6° $|f(x, u(x)) - f(x, U(x))| \leqslant q|u(x) - U(x)| \quad (x \in G_h)$,

если $u(x)$ и $U(x)$ — решения систем $\{(3), (4)\}$ и (5).

Оценим правые части системы (6)

$$|f(x, u) - f(x, U) + R(x)| \leqslant q\|\varepsilon\| + R \quad (x \in G_h), \quad |r_i(x)| \leqslant r \quad (x \in \Gamma_h).$$

На основе оценки (9) $|\varepsilon(x)| \leqslant 2r + \frac{1}{\omega}(q\|\varepsilon\| + R)$, откуда, при условии $\gamma_1 = \frac{q}{\omega} < 1$ и выполнении предположений 1°—6°, получим окончательную оценку погрешности

$$\|\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{1-\gamma_1}\left(2r + \frac{R}{\omega}\right). \tag{10}$$

Замечание 1. Разыскивая решение $\varrho(x)$ системы (8) в виде $\varrho(x) = \varkappa > 0$, можно получить при условиях 2°, 3° вместо (9) оценку $|u(x)| \leqslant \max\left(2v, \frac{V}{C}\right)$, на основе которой при выполнении 1°—3°, 5°, 6°, $\gamma_2 = \frac{q}{C} < 1$, получим и оценку погрешности

$$\|\varepsilon\| \leqslant \frac{1}{1-\gamma_2}\max\left(2r, \frac{R}{C}\right). \tag{11}$$

Замечание 2. В случае линейного уравнения ($f(x, u)$ не зависит от u) в найденных оценках $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. При этом оценку (10) можно заменить на более точную

$$|\varepsilon(x)| \leqslant 2r + \frac{R(1 + W(x))}{2\omega}. \tag{12}$$

Замечание 3. В частном случае, $n = 2$, $a_{st}(x) \equiv 0$ $(s \neq t)$, линейного уравнения оценки (10) (с $\gamma_1 = 0$) и (12) совпадают с известными оценками Коллаца (см. [1]; [2], гл. IV, § 2).

Замечание 4. При $h_i = \varkappa_i h$ ($\varkappa_i = \mathrm{const}$; $i = 1, 2, \ldots, n$) полученные оценки дают $|\varepsilon(x)| \leqslant O(h^2)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Березин И. С., Жидков Н. П., Методы вычислений, II, гл. 10, М., 1962.
2. Коллац Л., Численные методы решения дифференциальных уравнений, М., 1953.
3. Тамме Э., Уч. зап. Тартуск. гос. ун-та, 117, 154 (1965).

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
26/VI 1970