3. Румянцев В. В., ПММ, 25, 9 (1961).
4. Белецкий В. В., ПММ, 21, 749 (1957).
5. Белецкий В. В., ИСЗ, 16, 68 (1963).
6. Якоби К., Лекции по динамике, М.—Л., 1936, с. 34.
7. Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961, с. 103.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
11/V 1970

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.4.19

М. ЛЕВИН

О ВЫЧИСЛЕНИИ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

M. LEVIN. KAHEKORDSETE INTEGRAALIDE ARVUTAMISEST

M. LEVIN. THE NUMERICAL EVALUATION OF DOUBLE INTEGRALS

Пусть $\overline{D}$ — область, ограниченная линиями $x^2+y^2=r_1^2$, $x^2+y^2=r_2^2$, $y=x\operatorname{tg}\gamma_1$, $y=x\operatorname{tg}\gamma_2$, где $0<r_1<r_2$, $0\leqslant\gamma_1<\gamma_2\leqslant 2\pi$. Через $C(t)$ обозначим ту часть окружности $x^2+y^2=t^2$ $(r_1\leqslant t\leqslant r_2)$, которая принадлежит области $\overline{D}$. Пусть, далее, функция $f(x,y)$ имеет в области $\overline{D}$ непрерывные смешанные частные производные до порядка $2n$ включительно. Введем обозначение для среднего значения функции на $C(t)$

$$\varphi[f;t]=\frac{1}{(\gamma_2-\gamma_1)t}\int\limits_{C(t)} f(x,y)\,ds.$$

В настоящей заметке строится формула для приближенного вычисления двойного интеграла по области $\overline{D}$ от функции $f(x,y)$, использующая значения $\varphi^{(i)}[f;t]$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ в точках $t=r_1$ и $t=r_2$. Эту формулу можно рассматривать как аналог известной квадратурной формулы (см., напр., [1]).

С помощью многочленов Лежандра (приведенных к отрезку $[r_1,r_2]$ и имеющих старший коэффициент, равный единице)

$$P_m(r_1,r_2;x)=\frac{m!}{(2m)!}\frac{d^m}{dx^m}\left[(x-r_1)(x-r_2)\right]^m$$

образуем многочлены

$$P_{n+l,0}(x)=P_{n+l}(r_1,r_2;x),$$

$$P_{n+l,k}(x)=P_{n+l,k-1}(x)-b_{n+l,k}^{(k-1)}P_{n+l-k}(r_1,\ r_2;\ x)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ l),$$

где $b_{n+l,k}^{(k-1)}$ — коэффициент при x^{n+l-k} у многочлена $P_{n+l,k-1}(x)$.

Складывая эти многочлены, получим

$$P_{n+l,l}(x) = P_{n+l}(r_1, r_2; x) - \sum_{k=1}^{l} \overset{(k-1)}{b}_{n+l,k} P_{n+l-k}(r_1, r_2; x). \tag{1}$$

Это есть многочлен степени $n+l$ со старшим коэффициентом, равным единице, причем у этого многочлена коэффициенты при x^{n+l-1}, x^{n+l-2}, ..., x^n равны нулю.

Отметим одно свойство этого многочлена: среди всех многочленов вида $x^{n+l} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ наименее уклоняется от нуля на отрезке $[r_1, r_2]$ в L_2 многочлен (1).

Легко заметить, что

$$P_{n+1,1}(x) = P_{n+1}(r_1, r_2; x) + \frac{(n+1)(r_1+r_2)}{2} P_n(r_1, r_2; x).$$

Рассмотрим равенство

$$\int_{r_1}^{r_2} x^l u(x)\, dx = \frac{l!}{(n+l)!} \int_{r_1}^{r_2} u(x) \overset{(n)}{P}_{n+l,l}(x)\, dx.$$

Интегрируя по частям (по аналогии с тем, как формула из [1] выводится в книге [2]) правую часть последнего равенства, получаем формулу *

$$\int_{r_1}^{r_2} x^l u(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} [\overset{(n)}{\alpha}_{l,i} u^{(i)}(r_1) + \overset{(n)}{\beta}_{l,i} u^{(i)}(r_2)] + R_n(f), \tag{2}$$

где

$$R_n(f) = \frac{l!}{(n+l)!} \int_{r_1}^{r_2} u^{(2n)}(x) v_{n,l}(x)\, dx,$$

$$\overset{(n)}{\alpha}_{l,i} = \frac{(-1)^{i+1} l!}{(n+l)!} \overset{(n-i-1)}{P}_{n+l,l}(r_1), \qquad \overset{(n)}{\beta}_{l,i} = \frac{(-1)^{i} l!}{(n+l)!} \overset{(n-i-1)}{P}_{n+l,l}(r_2) \tag{3}$$

$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

$$v_{n,l}(x) = \frac{(n+l)!}{(2n+2l)!} \frac{d^l}{dx^l} [(x-r_1)(x-r_2)]^{n+l} -$$

$$- \sum_{k=1}^{l} \overset{(k-1)}{b}_{n+l,k} \frac{(n+l-k)!}{(2n+2l-2k)!} \frac{d^{l-k}}{dx^{l-k}} [(x-r_1)(x-r_2)]^{n+l-k}.$$

Применяя к правой части равенства

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = (\gamma_2 - \gamma_1) \int_{r_1}^{r_2} t\varphi[f; t]\, dt \tag{4}$$

формулу (2) при $l=1$, получим искомую формулу

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = (\gamma_2 - \gamma_1) \sum_{i=0}^{n-1} \{\overset{(n)}{\alpha}_{1,i} \varphi^{(i)}[f; r_1] + \overset{(n)}{\beta}_{1,i} \varphi^{(i)}[f; r_2]\} + \overset{*}{R}_n(f), \tag{5}$$

* Ее можно получить и с помощью интерполяционной формулы Эрмита, что в общем виде сделано в [3].

где

$$R_n^*(f) = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{(n+1)!} \int_{r_1}^{r_2} \varphi^{(2n)}[f; t] v_{n,1}(t)\, dt. \tag{6}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что для полученной формулы $R_n^*(f) = 0$, когда $f(x, y)$ есть произвольный многочлен двух переменных степени, не превышающей $2n-1$.

Подсчитав коэффициенты формулы (5) по (3), найдем для них следующие значения:

$$\alpha_{1,i}^{(n)} = \frac{n!\,(2n-i-1)!\,(r_2-r_1)^{i+1}}{2(2n)!\,(i+1)!\,(n-i-1)!} \left[r_1 + r_2 - \frac{(2n-i)(r_2-r_1)}{(2n+1)(i+2)} \right],$$

$$\beta_{1,i}^{(n)} = \frac{(-1)^i n!\,(2n-i-1)!\,(r_2-r_1)^{i+1}}{2(2n)!\,(i+1)!\,(n-i-1)!} \left[r_1 + r_2 + \frac{(2n-i)(r_2-r_1)}{(2n+1)(i+2)} \right]$$

$$(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1).$$

Оценим ошибку (6).

Пусть O — начало координат, $N(t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)$ и L означает направление ON.

Так как

$$\varphi[f; t] = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(t\cos\alpha, t\sin\alpha)\, d\alpha,$$

то

$$\varphi^{(k)}[f; t] = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\partial^k f(N)}{\partial L^k}\, d\alpha, \tag{7}$$

поэтому величина (6) принимает вид

$$R_n^*(f) = \frac{1}{(n+1)!} \int_{r_1}^{r_2} \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \frac{\partial^{2n} f(N)}{\partial L^{2n}} v_{n,1}(t)\, d\alpha\, dt. \tag{8}$$

Полагая, что в области $\overline{D}$

$$\left| \frac{\partial^{2n} f(N)}{\partial L^{2n}} \right| \leqslant M,$$

и учитывая, что $v_{n,1}(t)$ не меняет знака на $[r_1,\ r_2]$, по теореме о среднем значении из (8) получим

$$R_n^*(f) \leqslant \frac{(\gamma_2-\gamma_1)(r_2-r_1)^{2n}(r_2^2-r_1^2)M}{2(2n+1)!\binom{2n}{n}}.$$

Используя указанное выше свойство многочленов $P_{n+l,l}(x)$, по аналогии с [4] легко показать следующее.

Пусть Φ означает класс функций $f(x, y)$, для которых $\varphi[f; t]$ на отрезке $[0, 1]$ имеет абсолютно-непрерывную производную порядка $n-1$ и $\|\varphi^{(n)}[f; t]\|_{L_2} \leqslant Q$.

Теорема. *Среди формул вида*

$$\iint_{\overline{D}} f(x, y)\, dx\, dy = \sum_{i=0}^{n-1} \{A_i \varphi^{(i)}[f; r_1] + B_i \varphi^{(i)}[f; r_2]\} + R_n(f),$$

точных для функций $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{k/2}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, *наилучшей в классе* Φ, *т. е. с наименьшим значением величины*

$$R_n = \sup_{f \in \Phi} |R_n(f)|,$$

является формула (5). *Для этой формулы*

$$R_n = \frac{(\gamma_2 - \gamma_1)(r_2 - r_1)^n Q}{2n! \binom{2n}{n}} \sqrt{\frac{r_2 - r_1}{2n+1} \left[(r_2 + r_1)^2 + \frac{(r_2 - r_1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \right]}.$$

Ограничение на точность формулы необходимо, иначе $R_n = \infty$.

Рассматривая в (5) случай $r_1 \to 0$, $\gamma_2 - \gamma_1 = 2\pi$, придем к формулам интегрирования по кругу.

Отметим, что изложенное выше можно обобщить на интегралы произвольной кратности.

Настоящая заметка написана под влиянием работ [5, 6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Obreschkoff N., Abhandl. Preuß. Akad. Wiss., 4, 2 (1940).
2. Ланцош К., Практические методы прикладного анализа, М., 1961.
3. Stancu D. D., Stroud A. H., Math. Comput., 17, No. 84, 384 (1963).
4. Левин М., Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 5, 542 (1965).
5. Мысовских И. П., ДАН СССР, 147, 552 (1962).
6. Мысовских И. П., В сб.: Методы вычислений, 1, 1963, с. 3.

Таллинский политехнический институт

Поступила в редакцию
13/V 1970