EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 4

https://doi.org/10.3176/phys.math.1970.4.18

И. КЕЙС

ОБ ИНВАРИАНТАХ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

I. KEIS. GÜROSTAATILISTE SÜSTEEMIDE LIIKUMISE INVARIANTIDEST

I. KEIS. ON MOTION INVARIANTS OF GYROSTATIC SYSTEMS

В работе, продолжающей исследования [1–4], приводится выражение нового инварианта уравнений движения гиростатических систем (г. с.), центр масс которых равномерно описывает окружность произвольного радиуса вокруг притягивающего центра, который по действию на г. с. считается эквивалентным некоторой совокупности материальных точек с ньютоновским притяжением. Установленные в работе условия существования этого инварианта допускают возможность использовать его наряду с другими инвариантами при изучении устойчивости и оптимальной стабилизации некоторых решений уравнений движения гиростатических систем.

Известно [1, 3, 5], что уравнения вращения некоторого множества S_2 гиростатических систем в ньютоновском поле сил относительно их центра масс, движущегося по окружности с постоянной угловой скоростью x_0 вокруг притягивающего центра, определяются равенствами

$$\begin{aligned} dAx/dt &= [Ax+e, x]+[\operatorname{grad}_y U, y], \\ dy/dt &= [y, x-x_0 z], \\ dz/dt &= [z, x]. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $x=(x_1, x_2, x_3)'$ — вектор угловой скорости вращения ортогонального триэдра $O_2x_{12}x_{22}x_{32}$, оси которого совпадают с главными центральными осями эллипсоида инерции гиростатической системы s_2, относительно системы координат Кенига $O_2x_{11}x_{21}x_{31}$; $e=(e_1, e_2, e_3)'$ — постоянный в триэдре $O_2x_{12}x_{22}x_{32}$ вектор, равный сумме $k+Ix$, где k — момент относительного количества движения некоторой подсистемы s_{20} в s_2, I — тензор инерции подсистемы s_{20}; $y=(y_1, y_2, y_3)'$ — единичный вектор, направленный из притягивающего центра O_1 в O_2; $z=(z_1, z_2, z_3)'$ — вектор бинормали окружности. В данном случае и для реальных г. с. можно с большой степенью точности [5] считать силовую функцию U равной выражению

$$U(y) = -3/2x_0^2 < Gy, y >, \tag{2}$$

где $G=A+I$ — постоянный тензор инерции всей системы s_2, которому, ввиду свойств триэдра $O_2x_{12}x_{22}x_{32}$, соответствует диагональная матрица с положительными элементами G_1, G_2, G_3.

В предположении, что матрица тензора I также является диагональной с неотрицательными элементами g_1, g_2, g_3, для них введено условие, необходимое для получения инварианта и выражаемое равенством

$$(G_2-G_3)g_1+(G_3-G_1)g_2+(G_1-G_2)g_3=0. \tag{3}$$

Очевидно, что оба ограничения выполнимы для ряда систем рассматриваемого типа (например, тел, несущих маховики). Из равенства (3) следует, что параметры g_i (осевые моменты инерции маховиков) выражаются через две постоянные с помощью следующих линейных уравнений:

$$g_i = lG_i + m\sum_{j=1}^{3} G_j.$$

Постоянные ограничены лишь неотрицательностью левых частей выражений (4), которые можно получить, используя свойства G_j. Годны точки плоскости (l, m), лежащие не ниже прямой $l = -am$, где

$$3 \leqslant a = 1 + [2G_{mid} + (G_{max} - G_{mid})]G_{min}^{-1} \leqslant 2(1 + G_{mid}G_{min}^{-1}).$$

Отсюда для любых г. с. допустимы точки (l, m), принадлежащие углу раствора, меньшего π и образованного лучами $l = -3m$ $(m \geqslant 0)$ и $m = 0 (l \geqslant 0)$.

Пусть вектор $e = 0$, что определяет вторую группу необходимых условий для параметров гиростатических систем, выражаемую равенствами

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0. \tag{5}$$

Используя условия (3), (5), можно установить, что выражение

$$<A^2x, x> - 3x_0^2 <Cy, y> = h_1 \tag{6}$$

есть инвариант системы уравнений (1) в случае неподвижного центра O_2, если элементы диагональной матрицы C даны равенствами

$$c_k = (1 - l)G_iG_j + mG_k\sum_{s=1}^{3} G_s \quad (k \neq i \neq j). \tag{7}$$

Сохранив для системы (1) условия (5), подчиним выбор $g_i \geqslant 0$ следующим условиям, заменяющим условие (3):

$$A_j - A_i - d_0^2\varepsilon \leqslant g_i - g_j \leqslant A_j - A_i + d_0^2\varepsilon \tag{8}$$

при любых $i, j = \overline{1,3}$, где $\varepsilon = lR_0^{-1}$, а d_0 — конечная величина.

Заметим, что в пределах точности выражения [5] для U система (1) имеет инвариант

$$\langle A^2x, x\rangle = h_2, \tag{9}$$

к которому, ввиду соотношений (7), (8) и оценки $|dh_1/dt|$, сводится (6). Используя кроме h_2 два других нетривиальных инварианта системы (1), на которые распадается при условиях (8) классический интеграл Якоби [6], равных выражениям

$$\langle Ax, x\rangle = h_3, \quad \langle Ax, z\rangle = h_4,$$

порядок системы (1) можно понизить с 9 до 3, если применить y и z, выраженные через параметры Родрига [7].

ЛИТЕРАТУРА

1. Volterra V., Acta Math., 22, 201 (1898—1899).
2. Горячев Д. Н., Некоторые общие интегралы в задаче о движении твердого тела, Варшава, 1910, с. 1.

3. Румянцев В. В., ПММ, 25, 9 (1961).
4. Белецкий В. В., ПММ, 21, 749 (1957).
5. Белецкий В. В., ИСЗ, 16, 68 (1963).
6. Якоби К., Лекции по динамике, М.—Л., 1936, с. 34.
7. Лурье А. И., Аналитическая механика, М., 1961, с. 103.

Институт кибернетики
Академии наук Эстонской ССР

Поступила в редакцию
11/V 1970

EESTI NSV TEADUSTE AKADEEMIA TOIMETISED. 19. KÖIDE
FÜÜSIKA * MATEMAATIKA. 1970, NR. 4

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК ЭСТОНСКОЙ ССР. ТОМ 19
ФИЗИКА * МАТЕМАТИКА. 1970, № 4

М. ЛЕВИН

О ВЫЧИСЛЕНИИ ДВОЙНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

M. LEVIN. KAHEKORDSETE INTEGRAALIDE ARVUTAMISEST

M. LEVIN. THE NUMERICAL EVALUATION OF DOUBLE INTEGRALS

Пусть $\overline{D}$ — область, ограниченная линиями $x^2+y^2=r_1^2$, $x^2+y^2=r_2^2$, $y=x\operatorname{tg}\gamma_1$, $y=x\operatorname{tg}\gamma_2$, где $0<r_1<r_2$, $0\leqslant\gamma_1<\gamma_2\leqslant 2\pi$. Через $C(t)$ обозначим ту часть окружности $x^2+y^2=t^2$ $(r_1\leqslant t\leqslant r_2)$, которая принадлежит области $\overline{D}$. Пусть, далее, функция $f(x,y)$ имеет в области $\overline{D}$ непрерывные смешанные частные производные до порядка $2n$ включительно. Введем обозначение для среднего значения функции на $C(t)$

$$\varphi[f;t]=\frac{1}{(\gamma_2-\gamma_1)t}\int\limits_{C(t)} f(x,y)\,ds.$$

В настоящей заметке строится формула для приближенного вычисления двойного интеграла по области $\overline{D}$ от функции $f(x,y)$, использующая значения $\varphi^{(i)}[f;t]$ $(i=0,1,\ldots,n-1)$ в точках $t=r_1$ и $t=r_2$. Эту формулу можно рассматривать как аналог известной квадратурной формулы (см., напр., [1]).

С помощью многочленов Лежандра (приведенных к отрезку $[r_1,r_2]$ и имеющих старший коэффициент, равный единице)

$$P_m(r_1,r_2;x)=\frac{m!}{(2m)!}\frac{d^m}{dx^m}[(x-r_1)(x-r_2)]^m$$

образуем многочлены

$$P_{n+l,0}(x)=P_{n+l}(r_1,r_2;x),$$

$$P_{n+l,k}(x)=P_{n+l,k-1}(x)-b_{n+l,k}^{(k-1)}P_{n+l-k}(r_1,\ r_2;\ x)\quad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ l),$$

где $b_{n+l,k}^{(k-1)}$ — коэффициент при x^{n+l-k} у многочлена $P_{n+l,\,k-1}(x)$.